Приложение 2 к РПД Линейная алгебра
09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) – Программно-аппаратные комплексы
Форма обучения – очная
Год набора - 2020

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Общих дисциплин
2.	Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
3.	Направленность (профиль)	Программно-аппаратные комплексы
4.	Дисциплина (модуль)	Линейная алгебра
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2020

2. Перечень компетенций

– способность применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1);

– способность применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем (ОПК-8).

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
1. Линейные пространства	ОПК-1 ОПК-8	основы алгебры матриц; основные понятия теории множеств и общей алгебры; основы алгебры векторов	исследовать и решать системы линейных уравнений	навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.	Тест Решение задач(2) Групповая дискуссия(2)
2. Евклидовы пространства	ОПК-1	основные понятия теории множеств и общей алгебры	использовать метод координат в пространствах малой размерности	терминологией линейной алгебры в решении профессиональных задач	Тест Доклад Презентация Решение задач(2) Групповая дискуссия(2)
3. Линейные операторы	ОПК-1	основы алгебры векторов	применять матричные методы в решении алгебраических задач	навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.	Решение задач (2) Групповая дискуссия(2)
4. Линейные формы	ОПК-1 ОПК-8	применение метода координат в описании геометрических объектов	применять методы линейной алгебры в решении профессиональных задач	терминологией линейной алгебры в решении профессиональных задач	Тест Решение задач (2) Групповая дискуссия(3)
5. Билинейные и квадратичные формы	ОПК-1	классификацию алгебраических линий и поверхностей	применять методы линейной алгебры в решении профессиональных задач	навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.	Тест Решение задач(2) Групповая дискуссия(2)

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Тест

Процент правильных ответов	до 60	61-80	81-100
Количество баллов за ответы	**0**	**1**	**2**

4.2. Решение задач

2 балла – обучающийся решил все рекомендованные задачи, правильно изложил все варианты их решения, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо);

1 балл – обучающийся решил не менее 85% рекомендованных задач, правильно изложил все варианты решения, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо);

4.3. Выступление с докладом

Баллы	Характеристики выступления обучающегося
5	— обучающийся глубоко и всесторонне усвоил проблему; — уверенно, логично, последовательно и грамотно его излагает; — опираясь на знания основной и дополнительной литературы, тесно привязывает усвоенные научные положения с практической деятельностью; — умело обосновывает и аргументирует выдвигаемые им идеи; — делает выводы и обобщения; — свободно владеет понятиями
3	— обучающийся твердо усвоил тему, грамотно и по существу излагает ее, опираясь на знания основной литературы; — не допускает существенных неточностей; — увязывает усвоенные знания с практической деятельностью; — аргументирует научные положения; — делает выводы и обобщения; — владеет системой основных понятий
1	— тема раскрыта недостаточно четко и полно, то есть обучающийся освоил проблему, по существу излагает ее, опираясь на знания только основной литературы; — допускает несущественные ошибки и неточности; — испытывает затруднения в практическом применении знаний; — слабо аргументирует научные положения; — затрудняется в формулировании выводов и обобщений; — частично владеет системой понятий
0	— обучающийся не усвоил значительной части проблемы; — допускает существенные ошибки и неточности при рассмотрении ее; — испытывает трудности в практическом применении знаний; — не может аргументировать научные положения; — не формулирует выводов и обобщений; — не владеет понятийным аппаратом

4.4. Групповая дискуссия (устные обсуждения проблемы или ситуации)

Критерии оценивания	Баллы
– обучающийся ориентируется в проблеме обсуждения, грамотно высказывает и обосновывает свои суждения, владеет профессиональной терминологией, осознанно применяет	**2**

Критерии оценивания	Баллы
теоретические знания, материал излагает логично, грамотно, без ошибок; – при ответе обучающийся демонстрирует связь теории с практикой.	
– обучающийся грамотно излагает материал; ориентируется в проблеме обсуждения, владеет профессиональной терминологией, осознанно применяет теоретические знания, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности; – ответ правильный, полный, с незначительными неточностями или недостаточно полный.	**1**
– обучающийся излагает материал неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, не может доказательно обосновать свои суждения; – обнаруживается недостаточно глубокое понимание изученного материала.	**0**

4.5. Презентация

Критерии оценки презентации	Максимальное количество баллов
Содержание (конкретно сформулирована цель работы, понятны задачи и ход работы, информация изложена полно и четко, сделаны аргументированные выводы)	**2**
Оформление презентации (единый стиль оформления; текст легко читается; фон сочетается с текстом и графикой; все параметры шрифта хорошо подобраны; размер шрифта оптимальный и одинаковый на всех слайдах; ключевые слова в тексте выделены; иллюстрации усиливают эффект восприятия текстовой части информации)	**2**
Эффект презентации (общее впечатление от просмотра презентации)	**1**
Максимальное количество баллов	**5**

4.6. Выполнение задания на составление глоссария

	Критерии оценки	Количество баллов
1	аккуратность и грамотность изложения, работа соответствует по оформлению всем требованиям	**2**
2	полнота исследования темы, содержание глоссария соответствует заданной теме	**3**
	ИТОГО:	**5 баллов**

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы.

5.1. Типовое тестовое задание

1. При каком λ элементы линейного пространства $\mathbf{R}^3$
x1 = (3, -2, 5), x2 = (-4, 2, 1), x3 = (2, -4, λ) будут линейно зависимыми?

2 Линейное пространство образовано матрицами, имеющими 2 строки и 3 столбца. Сложение и умножение на число задаются обычным для матриц способом. Чему равна размерность пространства?

3.Найти размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. При каком α отображение $\boldsymbol{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, заданное формулой $\boldsymbol{A}(x_1, x_2) = (2x_1 + \alpha, 3x_1 + 2x_2)$, будет линейным оператором?

5. Линейный оператор φ задан в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ матицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Найти образ вектора $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, в ответе указать сумму его координат.

6. Линейный оператор **φ** : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$,
Вектор (β, 1) – собственный вектор для **φ,** относящийся к собственному значению λ=2. Найти β.

7. Найти положительный индекс инерции квадратично формы
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

8. Найти матрицу квадратичной формы, получаемой из
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
линейной заменой переменных $x_1 = 3y_1+y_2$, $x_2 =2y_1 - y_2$. В ответе указать элемент, стоящий в правом верхнем углу матрицы.

5.2. Типовые задачи

Линейные пространства

1. Доказать, что каждая из двух систем векторов (e) и (e’) является базисом, найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах.

$$\boldsymbol{e}: \ \vec{e}_1 = (1, 2, 1), \quad \boldsymbol{e}': \ \vec{e}_1 = (3, 1, 4),$$
$$\vec{e}_2 = (2, 3, 3), \quad \vec{e}_2 = (5, 2, 1),$$
$$\vec{e}_3 = (3, 7, 1); \quad \vec{e}_3 = (1, 1, -6).$$

Решение

Чтобы проверить, что каждая из систем векторов образует базис, надо найти их ранги. Для пространства V^3 ранг каждой из систем векторов должны равняться 3.

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$rang(e)=3,\ \Delta(e)=1$

$$e'=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&-7&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

rang (e') = 3, Δ(e') = 4

Пусть вектор в базисе e имеет координаты (x_1,x_2,x_3), а в базисе e' — координаты (x'_1,x'_2,x'_3).
Тогда связь задается формулой

, т.е. .

Найдем матрицу T перехода от базиса e к e'.
Согласно равенству e'=eT имеем матричное уравнение

,

для решения которого построим матрицу

.

Дальше имеем:

.

Итак,

2. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств
$L_1 = < \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} >$ и $L_2 = < \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3} >$, если :

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1,-2)^T$ $\quad$ $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$
$\mathbf{a}_2 = (2,3,1,0)^T$ $\quad$ $\mathbf{b}_2 = (1, 0,1,-1)^T$
$\mathbf{a}_3 = (1, 2,2,-3)^T$ $\quad$ $\mathbf{b}_3 = (1, 3,0, - 4)^T$

Евклидовы пространства

3. В евклидовом пространстве R^5 найти угол между векторами
$\boldsymbol{a} =(3,-5,1,5,-2)$ и $\boldsymbol{b} = (4,0,-4,4,1)$.

4. В евклидовом пространстве найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $||\boldsymbol{a},3 = ||$ $||\boldsymbol{b}1= ||$ и $||\ \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b2}\ || + {}^2||\boldsymbol{a}+ 2\boldsymbol{b}60 = {}^2||$

5. Доказать, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Линейные операторы

6. Найти собственные значения и собственные векторы
линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение
Запишем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0$$

Корень уравнения $\lambda = 2$ имеет кратность 3 и является собственным значением линейного оператора.
Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению
$\lambda = 2$ найдем из однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\cdot X = O$ при $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 1x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, придем к уравнению
$-2x1 + x2 = 0$.
Ранг матрицы системы r=1, выбираем базисной неизвестной x_2 , x_1 и x_3 будут свободными неизвестными. Решение СЛАУ может быть записано в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $X = \alpha\ (1,2,0) + \beta\ (0,0,1)$

Векторы $\boldsymbol{e1}$= (1,2,0) и $\boldsymbol{e2}$ = (0,0,1) порождают собственное подпространство оператора. Любой ненулевой вектор этого подпространства является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 2$

7. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств
$L_1 = < \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} >$ и $L_2 = < \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3} >$, если :

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1)^T$

$\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)^T$

$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 3)^T$ $\qquad$ $\mathbf{b}_3 = (1, 1, -3)^T$

8. Разложить вектор **X** на сумму двух векторов, один из которых лежит в подпространстве, натянутом на векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$, а другой ортогонален к этому подпространству.

$$\mathbf{X} = (-3, 5, 9, 3)^T$$

1.1.1.1.1

$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{a}_3 = (2, -7, -1, -1)^T$

9. Найти собственные значения и собственные вектора матриц:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Для заданной матрицы линейного оператора найти базис из собственных векторов и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Линейный оператор φ переводит векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ соответственно в векторы $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$.
Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в котором заданы координатами все векторы:

$\mathbf{a}_1 = (1, 2, -3)^T$ $\qquad$ $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)^T$ $\qquad$ $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 4)^T$

$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 1)^T$ $\qquad$ $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)^T$

Квадратичные формы

12. Преобразовать к сумме квадратов квадратичную форму и выписать преобразование координат

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

13. Преобразовать к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

5.3. Темы докладов

1.Применение матричных методов в задаче шифрования.
2.Гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве.

3.Квадратичные формы.

5.4. Перечень вопросов к экзамену

1.Линейное пространство, аксиомы Вейля. Примеры линейных пространств.
2.Линейная зависимость и независимость векторов, ее свойства. Базис. Примеры базисов в различных пространствах.
3.Размерность линейного пространства. Матрица перехода при замене базиса, ее свойства.
4.Линейное подпространство. Линейная оболочка векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Размерность суммы подпространств. Прямое дополнение.
5.Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения, неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами.
6.Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Матрица Грама.
7.Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение.
8.Норма, нормированное пространство. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма.
9.Линейный оператор. Ядро и образ оператора. Дефект и ранг оператора, их взаимосвязь.
10.Изоморфизм линейных пространств.
11.Матрица линейного оператора, вычисления в координатах. Ранг матрицы линейного оператора. Изменение матрицы оператора при замене базиса. Подобные матрицы.
12.Произведение линейных операторов, обратный оператор. Линейное пространство линейных операторов, его изоморфизм множеству квадратных матриц.
13.Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора.
14.Собственные вектора и собственные числа линейного оператора, их связь с характеристическим многочленом. Теорема Гамильтона-Кэли.
15.Линейное подпространство собственных векторов, инвариантное подпространство.
16.Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов.
17.Операторы простой структуры.
18.Жорданова форма матрицы оператора.
19.Сопряженный оператор, его матрица. Самосопряженный оператор, его матрица.
20.Собственные числа и собственные вектора самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в случае различных корней. Ортогональное дополнение инвариантного подпространства, размерность подпространства собственных векторов.
21.Матрица самосопряженного оператора в случае кратных корней.
22.Ортогональный оператор, его свойства. Ортогональный оператор и ортонормированные базисы. Матрица ортогонального оператора. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
23.Линейные формы (функционалы). Представление линейных форм в евклидовом пространстве. Билинейные формы. Матрица билинейной формы.
24.Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании.
25.Диагональная квадратичная форма. Теорема Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм.
26.Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.
27.Нормированные и ортогональные столбцы, ортогональная матрица. Условия ортогональности матрицы. Свойства ортогональных матриц. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) «Программно-аппаратные комплексы»

(код, направление, профиль)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Шифр дисциплины по РУП	**Б1.О.12**						
Дисциплина	**Линейная алгебра**						
Курс	**1**	семестр	**2**				
Кафедра	**Общих дисциплин**						
Ф.И.О. преподавателя, звание, должность	**Сахаров Ярослав Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общих дисциплин**						
Общ. трудоемкость$_{\text{час/ЗЕТ}}$	**144/4**	Кол-во семестров	**1**	Форма контроля	**Экзамен**		
ЛК $_{\text{общ./тек. сем.}}$	**16/16**	ПР/СМ$_{\text{общ./тек. сем.}}$	**16/16**	ЛБ$_{\text{общ./тек. сем.}}$	**-/-**	СРС $_{\text{общ./тек. сем.}}$	**76/76**

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

– способность применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1);

– способность применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем (ОПК-8).

Код формируемой компетенции	Содержание задания	Количество мероприятий	Максимальное количество баллов	Срок предоставления
Вводный блок				
Не предусмотрен				
Основной блок				
ОПК-1 ОПК-8	Решение тестов	4	8	В течение семестра согласно учебному расписанию
ОПК-1 ОПК-8	Решение комплекса задач	10	20	В течение семестра согласно учебному расписанию
ОПК-1 ОПК-8	Доклад	1	5	В течение семестра согласно учебному расписанию
ОПК-1 ОПК-8	Презентация	1	5	В течение семестра согласно учебному расписанию
ОПК-1 ОПК-8	Групповые дискуссии	11	22	На практических занятиях
		Всего:	**60**	
ОПК-1 ОПК-8	Экзамен	Вопрос 1	20	В сроки сессии
		Вопрос 2	20	
		Всего:	**40**	
		Итого:	**100**	
Дополнительный блок				
ОПК-1 ОПК-8	Подготовка глоссария		5	По согласованию с преподавателем
		Всего:	**5**	

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы МАГУ: «2» - 60 баллов и менее, «3» - 61-80 баллов, «4» - 81-90 баллов, «5» - 91-100 баллов.