

Приложение 2 к РПД «Уравнения математической физики»

05.03.01 Геология

Направленность (профиль) – Геофизика

Форма обучения – очная

Год набора – 2020

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ
АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Горного дела, наук о Земле и природообустройства
2.	Направление подготовки	05.03.01 Геология
3.	Направленность (профиль)	Геофизика
4.	Дисциплина (модуль)	Уравнения математической физики
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2020

2. Перечень компетенций

- способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания математики и естественных наук (ОПК-3).

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка.	ОПК-3	вид уравнений первого порядка, разрешенные относительно производной; уравнения с разделенными переменными и приводящиеся к ним; линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной	определять тип уравнения первого порядка; решать задачу Коши.	методами решений уравнений первого порядка разрешенных и неразрешенный относительно производной	Решение задач. Контрольная работа №1
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка.	ОПК-3	линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами; однородные и неоднородные линейные уравнения и методы их решений; линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами; уравнения Эйлера	определять тип уравнения n -го порядка; решать задачу Коши.	методами решений линейных однородных и неоднородных уравнений n -го порядка с постоянными и переменными коэффициентами	Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №2.
3. Уравнения в частных производных 1-го порядка.	ОПК-3	линейные и квазилинейные уравнения в частных производных; метод характеристик для решения уравнений в частных производных первого порядка и методы их интегрирования. Как ставится и решается задача Коши	определять тип уравнения; решать задачу Коши	методами решений уравнения в частных производных первого порядка	Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №3
4. Основные уравнения математической физики.	ОПК-3	уравнение колебаний; уравнение теплопроводности и диффузии; уравнения гидродинамики и звуковых волн.	определять тип уравнения	алгоритмами решения уравнений	Устный опрос. Решение задач.
5. Приведение уравнений к каноническому виду.	ОПК-3	определение типа уравнения в частных производных 2-го	определять тип уравнения; приводить	методом характеристик для	Устный опрос. Решение задач.

		порядка; метод характеристик для приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду	уравнение к каноническому виду	приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду	Контрольная работа №4
6. Уравнения гиперболического типа.	ОПК-3	задачу Коши для уравнений гиперболического типа; формулу Даламбера для свободных и вынужденных колебаний; методы решения краевых задач; задачу Штурма-Лиувилля; метод Фурье	использовать формулу Даламбера для решения задачи Коши	методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач	Решение задач. Контрольная работа №5
7. Уравнения параболического типа.	ОПК-3	о физических задачах, приводящих к уравнениям параболического типа; метод Тейлора для решения задачи Коши; метод разделения переменных (метод Фурье) для решения граничных задач уравнений гиперболического типа	определять тип уравнения; использовать метод Тейлора для решения задачи Коши определять тип уравнения	методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач	Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №6
8. Уравнения эллиптического типа.	ОПК-3	уравнения Лапласа и Пуассона; о фундаментальном решении уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве; как ставятся основные краевые задачи: задача Дирихле и Неймана; о сферических функциях.	решать уравнения Лапласа для круга	методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач	Решение задач. Контрольная работа №7

4. Критерии и шкалы оценивания

Решение задач

3 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные на практическом занятии задачи.

2 балл выставляется, если студент выполнил не менее 50% рекомендованных задач.

1 балл выставляется, если студент выполнил не менее 20% рекомендованных задач.

4.2. Контрольная работа

3 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

2 балла выставляется, если студент выполнил два рекомендованных задания, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

1 балл выставляется, если студент выполнил одно задание.

0 баллов – студент не выполнил рекомендованные задания.

Устный опрос

Процент правильных ответов	До 60	60-80	80-100
Количество баллов за ответы	1	2	3

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1. Типовые контрольные задания

1. Уравнения первого порядка

1.1. Решить уравнение: $x \sin t + x' \cos t = 1$

1.2. Решить задачу Коши: $x' + 3x \cdot \operatorname{tg} 3t = \sin 6t$, $x(0) = \frac{1}{3}$.

1.3. Решить уравнение: $y = \exp(y')(y' - 1)$

2. Уравнения «n»-го порядка

2.1. Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y' - 6y = 0$

2.2. Найти общее, частное решение и решение задачи Коши уравнения:

$$y'' - y = xe^x + e^{2x}, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = \frac{5}{12}.$$

2.3. Решить уравнение Эйлера: $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

3. Уравнения в частных производных первого порядка

3.1. Найти решение уравнения

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

3.2. Найти общий интеграл уравнения: $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4$.

3.3. Найти решение уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $z = -y$ при $x = 1$.

4. Приведение уравнений к каноническому виду

$$4.1. 4u_{xx} - 8u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 2u_y - 3u = 0.$$

$$4.2. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.3. 4y^2 u_{xx} + e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x = 0.$$

5. Уравнения гиперболического типа

5.1. Решить задачу Коши:

$$5.1.1. u_{tt} = 4u_{xx} + xt; u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = x$$

$$5.1.2. u_{tt} - \Delta u = 0; u|_{t=0} = x^3 + z^3, u_t|_{t=0} = y^3$$

5.2. Решить начально-граничную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 4\sin^3 x + 16\sin^5 x, 0 < x < \pi; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0; u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0.$$

6. Уравнения параболического типа

6.1. Решить задачу Коши:

$$6.1.1. u_t = u_{xx} + 3t^2; u|_{t=0} = \sin x.$$

$$6.1.2. u_t - \Delta u = xzt; u|_{t=0} = xy^3 + x^2 z^2.$$

6.2. Решить начально-граничную задачу:

$$u_t - 4u_{xx} = 0; 0 < x < 4; u|_{t=0} = 2\sin^3 \pi x + \sin 4\pi x, u|_{x=0} = u|_{x=4} = 0.$$

7. Уравнения эллиптического типа

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге

$$7.1. \Delta u = 0, 0 \leq r \leq 2, u|_{r=2} = f(\varphi) = 2\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \sin \varphi.$$

$$7.2. \Delta u = 0, 0 \leq r \leq 1, u|_{r=1} = f(\varphi) = \cos^3 \varphi - 2\sin^3 \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$7.3. \Delta u = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\cos \varphi + 3\sin 3\varphi.$$

5.2. Типовые задачи для практических занятий

Пример 1. Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени t имеющего начальную скорость v_0 ,двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги $F = b - kv$ и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при $t = 0$ сила тяги определяется выражением $F(t) = F_0 = b - kv_0$.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. $v = v(t)$, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \text{ где } F = b - kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m}. \quad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b - kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (*)

$$-\frac{1}{k} \ln|b - kv| = \frac{1}{m} t + C \text{ или } t = -\frac{m}{k} \ln|b - kv| + C \quad (**)$$

В решении (**) удовлетворим начальному условию – $v(0)=v_0$.

$$0 = -\frac{m}{k} \ln|b - kv_0| + C \Rightarrow C = \frac{m}{k} \ln|b - kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной C в общее решение (**), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k} \ln|b - kv| + \frac{m}{k} \ln|b - kv_0|$$

или

$$t = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{b - kv_0}{b - kv} \right| = \left\{ F_0 = b - kv_0, F = b - kv \right\} = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{F_0}{F} \right|.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t \frac{k}{m} = \ln \left| \frac{F_0}{F} \right| \Rightarrow \frac{F_0}{F} = e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F = F_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \blacktriangle$$

Пример 2. Рассмотрим вентиляцию забоя объемом $V(\text{м}^3)$, в котором в процессе проведения работ накапливаются вредные газообразные выделения в количестве Z в час. Пусть обмен воздуха в течении 1 часа составляет M ($\text{м}^3/\text{ч}$), причем приточный воздух содержит вредные вещества в концентрации μ на 1 м^3 . Требуется найти концентрацию Z (на 1 м^3) вредных выделений в забое через время t после начала работы, если начальное значение этой концентрации (остаток загрязнений от предыдущей смены) составляет Z_0 .

▲ За малый промежуток времени dt концентрация вредных выделений Z увеличивается на dZ . Следовательно общее количество выделений составит VdZ и оно будет состоять из выделений, принесенных приточным воздухом – μMdt , и выделений образовавшихся в процессе работы – Zdt за вычетом количества вредных выделений, которое содержалось в извлеченном из забоя за время dt воздухе. Предположим, что за малый промежуток времени dt изменение концентрации вредных выделений равно – $ZMdt$. Следовательно, уравнение вентиляции забоя имеет вид:

$$VdZ = \mu Mdt + Zdt - ZMdt \quad \text{или} \quad \frac{dZ}{dt} - \frac{1-M}{V} Z = \frac{\mu M}{V}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением, которое будем решать используя сразу формулу общего решения (1.51):

$$Z = e^{\frac{1-M}{V} \int dt} \left[C_1 + \frac{\mu M}{V} \int e^{-\frac{1-M}{V} \int dt} dt \right] = e^{\frac{1-M}{V} t} \left[C_1 - \frac{\mu M}{V} \cdot \frac{V}{1-M} e^{-\frac{1-M}{V} t} \right] \quad \text{или}$$

$$Z = C_1 e^{\frac{1-M}{V} t} - \frac{\mu M}{1-M}.$$

Удовлетворяя начальному условию $Z(0) = Z_0$, определим значение произвольной постоянной $Z_0 = C_1 - \frac{\mu M}{1-M}$, $\Rightarrow C_1 = Z_0 + \frac{\mu M}{1-M}$. Таким образом, окончательное решение исходной задачи имеет вид:

$$Z = Z_0 e^{\frac{1-M}{V} t} + \frac{\mu M}{1-M} \left(e^{\frac{1-M}{V} t} - 1 \right). \blacktriangle$$

Пример 3. Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени t имеющего начальную скорость v_0 , двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги $F=b-kv$ и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при $t=0$ сила тяги определяется выражением $F(t)=F_0=b-kv_0$.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. $v=v(t)$, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \text{ где } F = b - kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m}. \quad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b - kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (*)

$$-\frac{1}{k} \ln|b - kv| = \frac{1}{m}t + C \text{ или } t = -\frac{m}{k} \ln|b - kv| + C \quad (**)$$

В решении (**) удовлетворим начальному условию – $v(0) = v_0$.

$$0 = -\frac{m}{k} \ln|b - kv_0| + C \Rightarrow C = \frac{m}{k} \ln|b - kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной C в общее решение (**), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k} \ln|b - kv| + \frac{m}{k} \ln|b - kv_0|$$

или

$$t = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{b - kv_0}{b - kv} \right| = \left\{ F_0 = b - kv_0, F = b - kv \right\} = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{F_0}{F} \right|.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t \frac{k}{m} = \ln \left| \frac{F_0}{F} \right| \Rightarrow \frac{F_0}{F} = e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F = F_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \blacktriangle$$

Пример 4. Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищенный изоляцией толщиной 10 см отапливает рабочее помещение при этом температура трубы 160°C , а внешнего ее покрова 30°C . Определить распределение температуры внутри изоляции, если коэффициент теплопроводности $k = 0,00017$, а также количество теплоты, отдаваемой 1 м трубы.

▲ Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x , то, в соответствии с законом теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду будет равно

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = \text{const} \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, а площадь сечения тела $S(x)$ определяется по формуле

$$S(x) = 2\pi x l,$$

где x – радиус трубопровода, l – длина трубы, следовательно, уравнение (1) можно записать в виде

$$Q = -\lambda S(x) \frac{dT}{dx} = -2\lambda\pi x l \frac{dT}{dx}$$

или

$$Q + 2\lambda\pi x l \frac{dT}{dx} = 0 \quad (2)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (2) получим

$$dT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \cdot \frac{dx}{x} \quad (3)$$

По условию задачи необходимо определить распределение температуры внутри изоляции. Поэтому сначала левую часть уравнения (3) интегрируем в пределах от 160°C до 30°C, а правую часть интегрируем в пределах от 10 до 20 см.

$$\int_{160}^{30} dtT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \int_{10}^{20} \frac{dx}{x};$$

После интегрирования уравнения (3), находим

$$T|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln x|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln 2 \quad (4)$$

Затем, проинтегрируем левую часть уравнения (3) в пределах от 160°C до некоторой температуры T , а правую часть интегрируем в пределах от 10 до x см. После интегрирования уравнения (3), находим

$$\int_{160}^T dtT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l} \int_{10}^x \frac{dx}{x};$$

$$T|_{160}^T = T - 160 = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln x|_{10}^x = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \cdot \ln 0,1x \quad (5)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (4), получим

$$\frac{T - 160}{-130} = \frac{\ln 0,1x}{\ln 2}$$

Из этого уравнения следует, что закон распределения температуры внутри изоляции будет иметь вид

$$T = 591,8 - 431,8 \ln x$$

Кроме того, по условию задачи необходимо определить количество теплоты отдаваемой 1 м трубы. Поэтому для того, чтобы выполнить условие задачи необходимо из уравнения (4) при $l = 100$ см выразить Q и рассчитать его значение

$$Q = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100}{\ln 2} = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100}{0,69315} = 1730600 \text{ ккал} \blacktriangle$$

Пример 5. Кусок рудной массы m падает в рудоспуск под действием силы тяжести, при этом воздух оказывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения куска.

▲ Пусть s — расстояние, пройденное телом к моменту t . Тогда движение определяется уравнением

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

которое может быть представлено в виде

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (1)$$

где скорость $v = \frac{ds}{dt}$. Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Риккати.

Разделяя в нем переменные, имеем

$$\frac{mdv}{mg - kv^2} = dt$$

или после сокращения левой части равенства на m

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m} v^2} = dt$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = t + C \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (2) применяем метод неопределенных коэффициентов, и тогда

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = \int \frac{Adv}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{k}{m}}v} + \int \frac{Bdv}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{k}{m}}v} \quad (3)$$

Откуда

$$A - B = 0$$

$$A + B = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

или

$$A = B = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в интеграл (3), имеем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \int \frac{d\left(g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g + \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \int \frac{d\left(g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g - \sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)} = t + C$$

Для краткости обозначим $\sqrt{\frac{gk}{m}} = r$. Тогда после умножения равенства на $2\sqrt{\frac{gk}{m}}$

находим

$$\int \frac{d(g + rv)}{g + rv} - \int \frac{d(g - rv)}{g - rv} = 2r(t + C)$$

или

$$\ln(g + rv) - \ln(g - rv) = 2rt + 2rC$$

откуда

$$\ln\left(\frac{g + rv}{g - rv}\right) = 2rt + 2rC \quad (4)$$

Потенцируя уравнение (4), получаем

$$\frac{g + rv}{g - rv} = e^{2rt + 2rC} = e^{2rt} e^{2rC} = \{e^{2rC} = C_1\} = C_1 e^{2rt}$$

Откуда искомая функция имеет вид

$$v = \frac{g}{r} \cdot \frac{(C_1 e^{2rt} - 1)}{(C_1 e^{2rt} + 1)}$$

или с учетом того, что $g = \frac{r^2 m}{k}$ и $C^* = \frac{1}{C_1}$, получим

$$v = \frac{rm}{k} \cdot \frac{(e^{rt} - C^* e^{-rt})}{(e^{rt} + C^* e^{-rt})} \quad (5)$$

Из уравнения (5) очевидно, что при t , стремящемся к бесконечности, скорость v достигает предельного значения

$$v_{\max} = V,$$

для которого

$$V = \frac{rm}{k} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Следовательно, уравнение (5) записывается в виде

$$v = V \cdot \frac{(e^{rt} - C^* e^{-rt})}{(e^{rt} + C^* e^{-rt})} \quad (6)$$

Начальное условие: при $t = 0$ $v = v_0$.

Пусть ради краткости запиши $u_0 = v_0/V$. Тогда постоянная интегрирования C^* в уравнении (6) принимает значение

$$C^* = \frac{1 - u_0}{1 + u_0}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), замечаем, что v может быть записана в виде

$$v = V \cdot \frac{(u_0 + thrt)}{(1 + u_0 thrt)}$$

Принимая, что при $t = 0$ $s = 0$, можем теперь определить закон движения s :

$$s = \int_0^t v(t) dt = \frac{V}{r} \ln(\text{ch}rt + u_0 \text{sh}rt)$$

Подставляя $r = \frac{g}{V}$ и $u_0 = \frac{v_0}{V}$ в это равенство, окончательно получаем искомый закон движения

$$s = \frac{V^2}{g} \ln\left(\text{ch} \frac{gt}{V} + \frac{v_0}{V} \text{sh} \frac{gt}{V}\right). \blacktriangle$$

Пример 6. Найти решения уравнения:

$$(x^3 y - 3x^2 y + y^3) dx + 2x^3 dy = 0.$$

▲ Разделив обе части исходного уравнения на $dx \neq 0$ ($x=0$ – очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3 \frac{dy}{dx} + (x^3 - 3x^2)y = -y^3.$$

Считая $y \neq 0$ ($y=0$ – тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на $(-y^3)$ и делаем замену $z(x) = y^{-2}$. Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3} = z'(x), \quad x^3 z' - (x^3 - 3x^2)z = 1.$$

Решая это уравнение, находим

$$z(x) = C_1 x^{-3} e^x - x^{-3}.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения

$$C_1 y^2 e^x - y^2 - x^3 = 0; \quad x = 0; \quad y = 0. \blacktriangle$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения:

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

▲ Это уравнение является уравнением Риккати, в котором $a(x) = -1$, $b(x) = 0$ и $c(x) = 1 + x^2$. Проверка условия $c(x) = -a(x)x^2 - b(x)x + 1$. Привело к результату: $1 + x^2 = 1 + x^2$. Следовательно, это условие выполняется и за частное решение исходного уравнения можно принять функцию: $y_1 = x$. Таким образом, полагая $y = x + \frac{1}{z}$ и вычислив $y' = 1 - z^{-2} z'$, приводим исходное уравнение к неоднородному линейному уравнению: $z' - 2xz = 1$. Откуда

$$z = e^{x^2} (C + \int e^{-x^2} dx).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения Риккати имеет вид:

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx} \cdot \blacktriangle$$

Пример 8. Найти общий интеграл уравнения:

$$(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 2)dy = 0.$$

▲ Установим, является ли исходное уравнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого проверим, выполняется ли условие Эйлера (1.87). Здесь

$$M(x, y) = x + y - 1, \text{ а } N(x, y) = x - y^2 + 2.$$

Вычислим производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$: $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ и $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, следовательно, условие Эйлера выполнено, и исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x, y)$ по изложенной выше схеме, а именно, предположим, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1,$$

отсюда

$$u(x, y) = \int (x + y - 1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + \varphi(y).$$

Далее потребуем от $u(x, y)$ обеспечения равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x^2}{2} + xy - x + \varphi(y) \right] = N(x, y) = x - y^2 + 2,$$

или $0 + x - 0 + \varphi'(y) = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 2$, или $\varphi'(y) = -y^2 + 2$. Следовательно, $\varphi(y) = \int (-y^2 + 2)dy = -\frac{y^3}{3} + 2y$.

Таким образом, искомая функция и соответственно общий интеграл исходного уравнения будут иметь вид:

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y = C.$$

Получим общий интеграл исходного уравнения, потребовав выполнения равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$:

$u(x, y) = \int (x - y^2 + 2)dy + \psi(x) = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \psi(x)$, а теперь потребуем, чтобы выполнялось $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$: $y + \psi'(x) = x + y - 1$. Найдем $\psi(x) = \int (x - 1)dx = \frac{x^2}{2} - x$.

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$C = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \frac{x^2}{2} - x.$$

Следовательно, независимо от того, какое из условий (1.86) будет выполняться в первую очередь, общий интеграл исходного уравнения будет одним и тем же.

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (1.89):

$$\int_{x_0}^x (x + y - 1)dx + \int (x_0 - y^2 + 2)dy = C.$$

Выполним интегрирование:

$$\left(\frac{x^2}{2} + xy - x\right)\Big|_{x_0}^x + \left(x_0y - \frac{y^3}{3} + 2y\right)\Big|_{y_0}^y = C,$$

или

$$\frac{x^2}{2} + xy - x - \left(\frac{x_0^2}{2} + x_0y - x_0\right) + \left(x_0y - \frac{y^3}{3} + 2y\right) - \left(x_0y_0 - \frac{y_0^3}{3} + 2y_0\right) = C,$$

т.к. x_0, y_0 можно брать произвольно, то, обозначив $C_1 = C + \frac{x_0^2}{2} - x_0 + x_0y_0 + 2y_0 - \frac{y_0^3}{3}$, окончательно получим

$$C_1 = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y. \blacktriangle$$

Пример 9. Найти решения уравнения: $y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$.

▲ Разрешив это уравнение относительно x и, полагая в этом уравнении $y' = p$, получим $x = \frac{y}{p} \ln p$. Так как $dy = p dx$, то

$$dy = pd\left(\frac{y}{p} \ln p\right) = \frac{y}{p} dp + \ln p dy - \frac{y}{p} \ln p dp,$$

или

$$(1 - \ln p)\left(dy - \frac{y}{p} dp\right) = 0.$$

Из этого уравнения находим: $p = e$ и $p = Cy$. Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид:

$$x = \frac{y}{e} \text{ и } Cx = \ln Cy. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения: $y'' - y = 0$.

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$.

2. Найдем корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

3. Поскольку корни действительные и различные, то по правилу 1 им ставятся в соответствие функции $y_1 = e^x$, и $y_2 = e^{-x}$, которые составляют фундаментальную систему линейно независимых решений исходного уравнения. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \blacktriangle$$

Пример 24. Найти общее решение уравнения:

$$y^{(5)} - 5y^{(4)} + 18y''' - 34y'' + 45y' - 25y = 0.$$

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 18\lambda^3 - 34\lambda^2 + 45\lambda - 25 = 0.$$

2. Это характеристическое уравнение имеет корни:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i, \lambda_{4,5} = 1 \pm 2i.$$

3. Мы видим, что среди корней характеристического уравнения есть как действительные и различные корни, так и комплексно сопряженные, причем комплексные корни являются кратными. Поэтому для составления фундаментальной системы линейно независимых решений воспользуемся правилами 1, 2 и 3. Корню $\lambda_1 = 1$ соответствует решение

$y_1 = e^x$, а каждому из двукратных корней $\lambda_{2,4} = 1 + 2i$ и $\lambda_{3,5} = 1 - 2i$, отвечают решения: $y_2 = e^x \cos 2x$, $y_3 = xe^x \cos 2x$, $y_4 = e^x \sin 2x$, $y_5 = xe^x \sin 2x$. Совокупность этих пяти решений y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 - образует фундаментальную систему линейно независимых решений. Следовательно, общее решение запишется так:

$$y = C_1 e^x + e^x [(C_2 + xC_3) \cos 2x + (C_4 x + C_5) \sin 2x]. \blacktriangle$$

Пример 11. Найти частное и общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

▲ В соответствии с методом Лагранжа, составим соответствующее этому неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами однородное уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

и решим его. Для этого запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Это характеристическое уравнение имеет корни: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Мы видим, что корни характеристического уравнения комплексные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

Будем искать частное решение исходного уравнения в виде

$$y = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x. \quad (*)$$

Составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} \cos x + C_2'(x) e^{2x} \sin x = 0 \\ C_1'(x) (2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) + C_2'(x) (2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) = \frac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases}$$

или сокращая на e^{2x} ,

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x) (2 \cos x - \sin x) + C_2'(x) (2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x}. \end{cases} (**)$$

Решить эту систему относительно C_1' и C_2' можно различными способами, например, используя правило Крамера. В данном случае удобнее сначала преобразовать второе уравнение, а именно, умножить обе его части первого уравнения на -2 и затем прибавить полученный результат ко второму. В итоге получим уравнение:

$$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

и, следовательно, этим уравнением можно заменить второе уравнение в системе (**)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x, \Rightarrow C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\cos x|,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1, \Rightarrow C_2(x) = \int dx = x.$$

Подставляя полученные значения C_1' и C_2' в (*), получим частное решение исходного неоднородного уравнения

$$y_{\text{частное}}(x) = e^{2x} (\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x).$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x). \blacktriangle$$

Пример 12. Найти частное решение уравнения: $y'' - y = xe^x$.

▲ 1. Для правой части исходного уравнения определяем параметры α, β, q, l : $\alpha = 1, \beta = 0, q = 1$.

2. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 1 = 0$ действительные и различные, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Учитывая, что число $(\alpha + i\beta) = 1$ совпадает с корнем $\lambda_1 = 1$ кратности 1, то тогда $s = 1$, и $m = \max(q, l) = 1$. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_{\text{ч}}(x) = e^x(A_0 x + A_1)x.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_{\text{ч}}(x)$ и ее второй производной

$$y_{\text{ч}}''(x) = e^x[A_0 x^2 + x(4A_0 + A_1) + 2A_1 + 2A_0].$$

После преобразований (сокращения на e^x и приведения подобных) получаем равенство:

$$4A_0 x + 2A_0 + 2A_1 = x.$$

В этом равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях функции переменной x в правой и левой частях:

$$\begin{aligned} x^1 : 4A_0 &= 1 \\ x^0 : 2A_0 + 2A_1 &= 0 \end{aligned}, \text{ откуда следует, что } A_0 = \frac{1}{4}, A_1 = -\frac{1}{4}.$$

Полученные значения неопределенных коэффициентов A_0 и A_1 подставив в вид искомого частного решения, получим окончательно:

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{1}{4}e^x(x^2 - x). \blacktriangle$$

Пример 13. Найти частное решение уравнения:

$$y''' - y'' + 3y' + 5y = 5e^{2x} \cos x + 4e^{-x}.$$

▲ Прежде всего, функцию $f(x)$ представим в виде суммы двух функций $f_1(x) = 5e^{2x} \cos x$ и $f_2(x) = 4e^{-x}$. Для каждого случая будем подбирать свое частное решение исходного уравнения.

1. Для функции $f_1(x)$ определяем параметры α, β, q, l : $\alpha = 2, \beta = 1, q = 0$, а для функции $f_2(x)$ соответственно $\alpha = -1, \beta = 0, q = 0$.

2. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ имеет корни:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Учитывая, что для функции $f_1(x)$ число $(\alpha + i\beta) = 2 + i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s = 0$, а для функции $f_2(x)$ число $(\alpha + i\beta) = -1$ совпадает с корнем λ_1 кратности 1. Исходя из этого, можно выписать частное решение:

$$y_{\text{ч}}(x) = y_{\text{ч}1}(x) + y_{\text{ч}2}(x) = e^{2x}(A_0 \cos x + B_0 \sin x) + D_0 x e^{-x}.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_{\text{ч}}(x)$ и его производных и находим значения неопределенных коэффициентов A_0, B_0, D_0 . Для удобства определения этих коэффициентов подставим $y_{\text{ч}1}(x)$ в уравнение с правой частью $f_1(x)$, а $y_{\text{ч}2}(x)$ в уравнение с правой частью $f_2(x)$.

Подставляем $y_{\text{ч}1}(x) = e^{2x}(A_0 \cos x + B_0 \sin x)$ и производные:

$$y_{\text{ч}1}'(x) = e^{2x}(2A_0 \cos x + 2B_0 \sin x - A_0 \sin x + B_0 \cos x),$$

$$y_{\text{ч}1}''(x) = e^{2x}(3A_0 \cos x + 3B_0 \sin x - 4A_0 \sin x + 4B_0 \cos x),$$

$$y_{\text{ч}1}'''(x) = e^{2x}(2A_0 \cos x + 2B_0 \sin x - 11A_0 \sin x + 11B_0 \cos x)$$

в исходное уравнение с правой частью $f_1(x) = 5e^{2x} \cos x$. Сокращая на e^{2x} и приравнявая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в правой и левой частях полученного равенства, будем иметь систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 2A_0 + 11B_0 - 3A_0 - 4B_0 + 6A_0 + 3B_0 + 5A_0 = 5, \\ 2B_0 - 11A_0 - 3B_0 + 4A_0 + 6B_0 - 3A_0 + 5B_0 = 0, \end{cases}$$

или после преобразований

$$\begin{cases} 10A_0 + 10B_0 = 5 \\ -10A_0 + 10B_0 = 0, \end{cases}$$

откуда находим, что

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{4}, \Rightarrow y_{q1}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x).$$

Далее подставляем функцию $f_2(x) = D_0 x e^{-x}$ и ее производные:

$$y'_{q2}(x) = D_0 e^{-x} (-x + 1), \quad y''_{q2}(x) = D_0 e^{-x} (x - 2), \quad y'''_{q2}(x) = D_0 e^{-x} (3 - x)$$

в исходное уравнение с правой частью равной $4e^{-x}$. Сократив на e^{-x} , получим равенство $8D_0 = 4$, то есть $D_0 = 1/2$, следовательно

$$y_{q2}(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения запишем в виде суммы двух частных решений, и окончательно оно будет иметь вид:

$$y_q(x) = y_{q1}(x) + y_{q2}(x) = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} x e^{-x}. \blacktriangle$$

Пример 14. Найти решение уравнения: $x^2 y'' - xy' + y = 0$.

▲ Полагая $x = e^t$ или $t = \ln x$, найдем $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной t , обозначив точками дифференцирование по t :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = \dot{y} e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt} (y') \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (\dot{y} e^{-t}) \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}.$$

Подставив \dot{y} , \ddot{y} в исходное уравнение, получим

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} \cdot \dot{y} + y = 0, \text{ или } \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Следовательно, мы получили однородное линейное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Поскольку корни действительные и кратные, с кратностью равной двум, то общее решение будет иметь вид:

$$y(t) = (C_1 + tC_2) e^t.$$

Перейдя к переменной x , окончательно получим общее решение исходного уравнения

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x) x. \blacktriangle$$

Пример 15. Найти решение уравнения:

$$x^2 y'' - xy' + y = \cos \ln x.$$

▲ Полагая $x = e^t$ или $t = \ln x$, найдем $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной t , обозначив точками дифференцирование по t :

$$y' = \dot{y} e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}.$$

Подставив \dot{y} , \ddot{y} в исходное уравнение, получим

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t. (*)$$

Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующего ему однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = (C_1 + tC_2)e^t,$$

а частное решение можно получить методом неопределенных коэффициентов.

Поскольку параметры правой части неоднородного уравнения (*) равны, соответственно, $\alpha = 0, \beta = 1, q = 0, l = 0$ и число $(\alpha + i\beta) = i\beta$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому $s=0$, и $m = \max(q, l) = 0$. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_v(t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t$$

Вычислим производные от $y_v(t)$

$$\dot{y}_v(t) = -A_0 \sin t + B_0 \cos t,$$

$$\ddot{y}_v(t) = -A_0 \cos t - B_0 \sin t$$

и подставив их в уравнение (*), получим

$$-2B_0 \cos t + 2A_0 \sin t \equiv \cos t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях этого уравнения

$$-2B_0 = 1, \Rightarrow B_0 = -\frac{1}{2},$$

$$2A_0 = 0, \Rightarrow A_0 = 0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (*) имеет вид

$$y_v(t) = -\frac{1}{2} \sin t,$$

а общее решение уравнения (*) будет выглядеть так:

$$y_{\text{общее}}(t) = (C_1 + tC_2)e^t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x - \frac{1}{2} \sin \ln x. \blacktriangle$$

Пример 16. Найти общий интеграл и общее решение уравнения

$$u_x - u_y = 0$$

▲ Запишем для этого уравнения систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ \frac{dy}{dt} = -1 \end{cases}$$

Далее запишем симметричную форму этой системы

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{0}.$$

Первый интеграл очевиден

$$1) du = 0 \Rightarrow C_1 = u.$$

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

$$2) \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow dy + dx = 0,$$

интегрируя это уравнение, найдем

$$C_2 = y + x.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения можно представить в виде

$$\Phi(C_1, C_2) = \Phi[u, x + y],$$

а общее решение будет выглядеть как

$$u = f(x + y).$$

Аналогичным образом решается уравнение

$$u_x + u_y = 0$$

и его решение имеет вид

$$u = f(x - y). \blacktriangle$$

Пример 17. Найти общий интеграл и общее решение уравнения

$$yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = -2xy.$$

▲ Запишем для него систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = yu, \\ \frac{dy}{dt} = xu, \\ \frac{du}{dt} = -2xy. \end{cases}$$

Далее запишем симметричную форму этой системы

$$\frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xu} = \frac{du}{-2xy}.$$

Первый интеграл очевиден

$$1) \frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xu} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow C_1 = y^2 - x^2.$$

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

$$2) \frac{dx}{yu} = \frac{du}{-2xy} \Rightarrow 2xdx = -udu,$$

интегрируя это уравнение, найдем

$$C_2 = \frac{u^2}{2} + x^2.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения можно представить в виде

$$\Phi(C_1, C_2) = \Phi\left[\frac{u^2}{2} + x^2, x^2 - y^2\right],$$

а общее решение будет выглядеть как

$$u = \pm \sqrt{2[f(x^2 + y^2) - x^2]}. \quad \blacktriangle$$

Пример 18. Необходимо найти интегральную поверхность, заданную уравнением

$$xz_y - yz_x = 0,$$

проходящую через кривую, заданную уравнениями

$$x = 0; \quad z = y^2.$$

▲ Запишем уравнение характеристик

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Первый интеграл очевиден

$$1) dz = 0 \Rightarrow C_1 = z.$$

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

$$2) \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y} \Rightarrow xdx + ydy = 0,$$

интегрируя это уравнение, найдем

$$C_2 = x^2 + y^2.$$

Составим систему (25)

$$\begin{cases} C_1 = z, \\ C_2 = x^2 + y^2, \\ x = 0, \\ z = y^2. \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 + z = 0 + C_1 = C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$$

Следовательно, т.к. $C_1 = z$, а $C_2 = x^2 + y^2$, то уравнение искомой поверхности проходящей через заданную линию имеет вид

$$z = x^2 + y^2. \blacktriangle$$

Пример 19. Определить к какому типу принадлежит уравнение

$$u_{yy} - a^2 u_{xx} = 0.$$

▲ Сравним это уравнение с общим видом уравнения в частных производных второго порядка

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Eu_x + Du_y + Ku = 0,$$

и определим значения коэффициентов A , B и C

$$A = -a^2; B = 0; C = 1,$$

вычислив выражение

$$B^2 - AC = 0^2 - (-a^2) \times 1 = a^2 > 0,$$

убедимся в том, что исходное уравнение принадлежит к уравнениям гиперболического типа. ▲

Пример 20. Привести к каноническому виду уравнение:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \quad (П20.1)$$

▲ Запишем общий вид уравнения второго порядка

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (П20.2)$$

и сравним коэффициенты при производных в уравнении (П20.2) и в исходном (П20.1):

$$a = x^2; b = 0; c = -y^2.$$

Определим, к какому типу принадлежит исходное уравнение:

$$D = b^2 - ac = 0 - x^2(-y^2) = (xy)^2 > 0,$$

следовательно, исходное уравнение (П3.1.1) принадлежит к уравнениям гиперболического типа.

Осуществим переход к канонической форме с помощью общих интегралов уравнения характеристик. В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0, \text{ или } (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0,$$

$$\Rightarrow xdy + ydx = 0, \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \Rightarrow xy = C_1;$$

$$\Rightarrow xdy - ydx = 0, \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2.$$

Следовательно, C_1 и C_2 определяют уравнения семейств характеристик. Тогда преобразование независимых переменных будет иметь вид

$$\xi = C_1 = xy,$$

$$\eta = C_2 = \frac{y}{x}.$$

Найдем u_{xx} и u_{yy} в новых переменных

$$u_x = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\eta\xi}\eta_x = u_{\xi\xi}y - \frac{y}{x^2}u_{\eta\xi}, \quad u_y = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\eta\xi}\eta_y = xu_{\xi\xi} + \frac{1}{x}u_{\eta\xi},$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\xi\eta}\eta_x^2 + u_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi} + u_{\eta\xi}\eta_{xx} =$$

$$= y^2u_{\xi\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\xi\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_{\eta\xi},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\xi\eta}\eta_y^2 + u_{\xi\xi}\xi_{yy} + u_{\eta\xi}\eta_{yy} = x^2u_{\xi\xi\xi} + 2u_{\xi\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\xi\eta}.$$

Таким образом, исходное уравнение (П20.1) в новых переменных имеет вид:

$$x^2\left(y^2u_{\xi\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\xi\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_{\eta\xi}\right) - y^2\left(x^2u_{\xi\xi\xi} + 2u_{\xi\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\xi\eta}\right) = 0,$$

и после преобразований, получим

$$2\frac{y}{x}u_{\eta\xi} - 4y^2u_{\xi\xi\eta} = 0 \text{ или } \frac{1}{2xy}u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi\eta} = 0,$$

с учетом того, что $xy = \xi$ каноническая форма исходного уравнения имеет вид:

$$u_{\xi\xi\eta} = \frac{1}{2\xi}u_{\eta\xi}. \blacktriangle$$

Пример 21. Найти решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x.$$

▲ Для нахождения решения исходной задачи Коши используем формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\Theta) d\Theta,$$

в которой $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 4x$, а $a = 1$.

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[(x - at)^2 + (x + at)^2\right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 4\Theta d\Theta = \frac{1}{2}(x^2 - 2xt + t^2 + x^2 + 2xt + t^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\Theta^2}{2} \Big|_{x-t}^{x+t} = \frac{1}{2}(2x^2 + 2t^2) + (x+t)^2 + (x-t)^2 = x^2 + t^2 + 4xt.$$

Окончательно решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, t) = x^2 + t^2 + 4xt. \blacktriangle$$

Пример 22. Найти решение уравнения

$$u_{tt} = 4u_{xx} + xt,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

▲ Для нахождения решения исходной задачи Коши используем формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

в которой $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x$, $a = 2$, а $f(x, t) = xt$.

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [(x - 2t)^2 + (x + 2t)^2] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \xi d\xi + \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \xi \tau d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 8xt + 4t^2 + x^2 + 8xt + 4t^2) + \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{2} \Big|_{x-2t}^{x+2t} + \frac{1}{4} \int_0^t \tau \frac{\xi^2}{2} \Big|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} d\tau =$$

Окончательное

$$= x^2 + 4t^2 + xt + 2x \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} \right).$$

решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, t) = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{1}{3} xt^3. \quad \blacktriangle$$

Пример 23. Найти решение уравнения

$$u_{tt} = \Delta u, \quad \text{если } u|_{t=0} = x^4 + y, \quad u_t|_{t=0} = x + z^2$$

▲ Здесь $\bar{x} = (x, y, z)$, $u_0 = x^4 + y$, $u_1 = x + z^2$.

Так как $a^2 = 1$ и $f(\bar{x}, t) = 0$, то по формуле

$$u_{n+2}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x}, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

получаем $u_{n+2}(\bar{x}) = \Delta u_n(\bar{x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Отсюда, при $n = 0$, получим

$$u_2 = \Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 12x^2 + 0 + 0 = 12x^2,$$

при $n = 1$, получим

$$u_3 = \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0 + 0 + 2 = 2,$$

при $n = 2$, получим

$$u_4 = \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 24,$$

при $n = 3$, получим

$$u_5 = \Delta u_3 = 0,$$

при $n = 4$, получим

$$u_6 = \Delta u_4 = 0, \dots$$

то есть, все остальные $u_{2k} = 0$ ($k \geq 3$) и $u_{2k+1} = 0$ ($k \geq 2$).

Подставляем найденные u_n в решение

$$u(\bar{x}, t) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + \frac{t^3}{3!} u_3 + \frac{t^4}{4!} u_4 + \frac{t^5}{5!} u_5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x})$$

получаем

$$u(x, y, z, t) = x^4 + y + t(x + z^2) + \frac{t^2}{2} \cdot 12x^2 + \frac{t^3}{6} \cdot 2 + \frac{t^4}{24} \cdot 24.$$

Окончательно решение задачи имеет вид

$$u(x, y, z, t) = x^4 + y + t(x + z^2) + 6x^2 t^2 + \frac{1}{3} t^3 + t^4. \quad \blacktriangle$$

Пример 24. Найти решение уравнения

$$u_{tt} - 2\Delta u = 2xyt^2, \text{ если } u|_{t=0} = xy + z^2, \quad u_t|_{t=0} = y^3$$

▲ Здесь $\bar{x} = (x, y, z)$, $u_0 = xy + z^2$, $u_1 = y^3$. Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x}, t) = 2xyt^2$,

то по формуле $u_{n+2}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x}, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, n = 0, 1, 2, \dots$

получаем $u_{n+2}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n}{\partial t^n} (2xyt^2) \Big|_{t=0}, n = 0, 1, 2, \dots$

Найдем u_n по этой формуле

$$n = 0$$

$$u_2 = 2\Delta u_0 + 2xyt^2 \Big|_{t=0} = 2(0 + 0 + 2) + 0 = 4,$$

$$n = 1$$

$$u_3 = 2\Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial t} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2 \cdot 6y + 4xyt \Big|_{t=0} = 12y + 0 = 12y,$$

$$n = 2$$

$$u_4 = 2\Delta u_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2 \cdot 0 + 4xy \Big|_{t=0} = 4xy,$$

$$n = 3$$

$$u_5 = 2\Delta u_3 + \frac{\partial^3}{\partial t^3} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2\Delta(12y) + 0 = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$n = 4$$

$$u_6 = 2\Delta u_4 + \frac{\partial^4}{\partial t^4} (2xyt^2) \Big|_{t=0} = 2\Delta(4xy) + 0 = 2 \cdot 0 = 0.$$

И так далее, все остальные $u_{2k} = 0 (k \geq 3)$ и $u_{2k+1} = 0 (k \geq 2)$.

Подставляем полученные u_n в решение

$$u(\bar{x}, t) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + \frac{t^3}{3!} u_3 + \frac{t^4}{4!} u_4 + \frac{t^5}{5!} u_5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x}).$$

получаем

$$u(x, y, z, t) = xy + z^2 + ty^3 + \frac{t^2}{2} \cdot 4 + \frac{t^3}{6} \cdot 12y + \frac{t^4}{24} \cdot 4xy =$$

$$xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6}xyt^4.$$

Таким образом, решением исходного уравнения является функция

$$u(x, y, z, t) = xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6}xyt^4. \quad \blacktriangle$$

Пример 25. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент форму параболы $u = x(l-x) \cdot \frac{4h}{l^2}$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

▲ Запишем волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (П25.1)$$

начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = x(l-x) \cdot \frac{4h}{l^2}, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) = 0 \quad (П25.2)$$

и граничные условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (П25.3)$$

в соответствии с условиями задачи.

Решение исходной задачи дается формулой

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos a \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin a \frac{n\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (П25.4)$$

в которой коэффициенты ряда – a_n и b_n , определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \frac{4h}{l^2} \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (П25.5)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \{\psi(x) = 0\} = 0.$$

Вычислим интеграл (П25.5)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8h}{l^2} \int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= \{u_1 = lx - x^2, \Rightarrow du_1 = (l - 2x) dx; dv_1 = \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \Rightarrow v_1 = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{l} x\} = \\ &= -\frac{8h}{l^2} (lx - x^2) \frac{l}{k\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l + \frac{8h}{n\pi^2 l} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= \{u_2 = l - 2x, \Rightarrow du_2 = -2 dx; dv_2 = \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \Rightarrow v_2 = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x\} = \\ &= \frac{8h}{n^2 \pi^2 l} (l - 2x) \sin \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l + \frac{16h}{n^2 \pi^2 l} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \\ &= -\frac{16h}{n^3 \pi^3} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l = -\frac{16h}{n^3 \pi^3} (\cos n\pi - 1) = \frac{16h}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_n и b_n , в формулу (П25.4), получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16h}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \cos a \frac{n\pi}{l} t \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

При четном $n=2k$ выражение $\{1 - (-1)^n\} = 0$, следовательно, и решение $u(x, t) = 0$, а при нечетном $n=2k+1$ выражение $\{1 - (-1)^n\} = 2$, поэтому окончательное решение исходной задачи имеет вид

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos a \frac{(2k+1)\pi}{l} t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \blacktriangle$$

Пример 26. Найти решение уравнения

$$u_t = 4u_{xx} + t, \quad u|_{t=0} = 2x^3$$

▲ Здесь $u_0 = 2x^3$. Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x}, t) = t$, то по формуле

$$u_{n+1}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x}, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

получаем $u_{n+1}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Отсюда находим

$$u_1 = 2\Delta u_0 = 2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) = 2(6x + 0 + 0) + t = 4(3xy + y^2 + z^2),$$

$$u_2 = 2\Delta u_1 = 2(0 + 8 + 8) = 32,$$

$$u_3 = 2\Delta u_2 = 0, \dots$$

То есть, все остальные $u_{k+1} = 0$ ($k \geq 2$).

Подставляем полученные u_n в решение

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x}) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + \frac{t^3}{3!} u_3 + \frac{t^4}{4!} u_4 + \frac{t^5}{5!} u_5 + \dots,$$

$$\text{получаем } u(x, y, z, t) = x^3 y + y^2 z^2 + t \cdot 4(3xy + y^2 + z^2) + \frac{t^2}{2} \cdot 32$$

или окончательно решение имеет вид

$$u(x, y, z, t) = x^3 y + y^2 z^2 + 4(3xy + y^2 + z^2)t + 16t^2. \blacktriangle$$

Пример 27. Найти решение уравнения

$$u_t = 2\Delta u, \text{ если } u|_{t=0} = x^3 y + y^2 z^2$$

▲ Здесь $\bar{x} = (x, y, z)$, $u_0 = x^3 y + y^2 z^2$. Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x}, t) = 0$, то по формуле

$$u_{n+1}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x}, t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

получаем $u_{n+1}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Отсюда находим

$$u_1 = 2\Delta u_0 = 2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) = 2(6xy + 2z^2 + 2y^2) = 4(3xy + y^2 + z^2),$$

$$u_2 = 2\Delta u_1 = 2(0 + 8 + 8) = 32,$$

$$u_3 = 2\Delta u_2 = 0, \dots$$

То есть, все остальные $u_{k+1} = 0$ ($k \geq 2$).

Подставляем полученные u_n в решение в решение

$$u(\bar{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x}) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!} u_2 + \frac{t^3}{3!} u_3 + \frac{t^4}{4!} u_4 + \frac{t^5}{5!} u_5 + \dots,$$

получаем

$$u(x, y, z, t) = x^3 y + y^2 z^2 + t \cdot 4(3xy + y^2 + z^2) + \frac{t^2}{2} \cdot 32$$

или окончательно решение имеет вид

$$u(x, y, z, t) = x^3 y + y^2 z^2 + 4(3xy + y^2 + z^2)t + 16t^2. \blacktriangle$$

Пример 28. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части круга радиуса R , удовлетворяющее краевому условию

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_{r=R} = \sin^2 \varphi. \quad (П28.1)$$

▲ В этом примере задана задача Дирихле, где правая часть граничного условия (П28.1) $f(\varphi) = \sin^2 \varphi$. Решение ищется в круге ($r < R$), значит, выписывать решение будем по формуле

$$u(r, \varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{R} \right)^n,$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

Найдем в этой формуле коэффициенты A_0 , A_n и B_n

Для этого подставим само решение в левую часть граничного условия (П28.1) при $r = R$, а правую часть, т. е. функцию $f(\varphi)$ разложим в ряд Фурье по синусам и косинусам

$$u|_{r=R} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R^n \cos n\varphi + B_n R^n \sin n\varphi) = f(\varphi) = \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (П28.2)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами и при свободном члене в левой и правой частях полученного равенства (П28.2)

$$A_0 = \frac{1}{2},$$

$$n = 2, \Rightarrow A_2 R^2 = -\frac{1}{2}, \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2R^2}$$

$B_n = 0$ (при $\forall n$), т.к. справа нет слагаемых с $\sin n\varphi$, а также все остальные $A_n = 0$ (кроме A_0, A_2). Подставим ненулевые A_0 и A_2 в решение (18.28) и получим ответ, т. е. найдем функцию $u(r, \varphi)$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \alpha_2 r^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2R^2}\right) r^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\varphi. \blacktriangle$$

Пример 29. Найти решение уравнения Лапласа внутри круга радиуса R ($r < R$), удовлетворяющее на границе условию Неймана

$$\Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 2 \cos \varphi + 3 \sin 3\varphi. \quad (П29.1)$$

▲ В этом примере задана задача Неймана, где правая часть граничного условия (П29.1) $f(\varphi) = 2 \cos \varphi + 3 \sin 3\varphi$ (уже разложена в ряд Фурье), которую можно представить в виде двух функций

$$f(\varphi) = 2 \cos \varphi + 3 \sin 3\varphi = \{f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi; f_2(\varphi) = 3 \sin 3\varphi\} = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$$

и для каждой из них найдем решение. Прежде чем решать поставленную задачу проверим

$$\text{выполнение условия } \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

получаем

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi + 3 \sin 3\varphi) d\varphi = 2 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{3} \cos 3\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0 - 1 + 1 = 0,$$

так как условие выполнено, то для решения поставленной задачи вычислим производную от решения

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n,$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{Получим } \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

и запишем граничные условия сначала для функции $f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi \quad (П29.2)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами в левой и правой частях полученного равенства (П29.2):

$$1) n = 1$$

$$A_1 \cos \varphi = 2 \cos \varphi \Rightarrow A_1 = 2,$$

а все остальные $A_n = 0$ и $B_n = 0$. Следовательно, решение, соответствующее функции $f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi$, имеет вид

$$u_1(r, \varphi) = 2r \cos \varphi.$$

Затем запишем граничные условия сначала для функции $f_2(\varphi) = 3 \sin 3\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} n R^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f_2(\varphi) = 3 \sin 3\varphi \quad (П29.3)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами в левой и правой частях полученного равенства (П29.3):

$$2) n = 3,$$

$$A_n = 0;$$

$$B_3 3R^{3-1} = d_n, \Rightarrow B_3 = \frac{3}{3R^2},$$

а все остальные $B_n = 0$.

Следовательно, решение, соответствующее функции $f_2(\varphi) = 3 \sin 3\varphi$ имеет вид

$$u_2(r, \varphi) = \frac{r^3}{R^2} \sin 3\varphi.$$

Таким образом, решение исходной задачи будет определяться формулой

$$u(r, \varphi) = u_1(r, \varphi) + u_2(r, \varphi) = 2r \cos \varphi + \frac{r^3}{R^2} \sin 3\varphi. \quad \blacktriangle$$

5.3. Темы для устного опроса

1. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Условие Липшица.

2. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной

3. Уравнение Чебышева.

4. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных.

5. Уравнения гидродинамики и звуковых волн.

6. Уравнение характеристик и его использование для приведения уравнения к каноническому виду.

7. Собственные значения и собственные функции.

8. Решение задачи Коши методом Пуассона.

9. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца.

5.4. Вопросы к зачету

1. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.

2. Уравнения с разделенными переменными и приводящиеся к ним.

3. Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним.

4. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной.

5. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

6. Однородные линейные уравнения.

7. Неоднородные линейные уравнения и методы их решений.

8. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами. Уравнения Эйлера.

9. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных.

10. Метод характеристик.

11. Уравнения в частных производных первого порядка и методы их интегрирования.

12. Решение задачи Коши.

13. Уравнение колебаний.

14. Уравнение теплопроводности и диффузии.

15. Уравнения гидродинамики и звуковых волн.

16. Определение типа уравнения в частных производных 2-го порядка.

17. Метод характеристик для приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду.

18. Задача Коши для уравнений колебаний.

19. Формула Даламбера для свободных и вынужденных колебаний.

20. Методы решения краевых задач.

21. Задача Штурма-Лиувилля.

22. Собственные значения и собственные функции.

23. Метод разделения переменных (метод Фурье) при решении граничных задач уравнений гиперболического типа.

24. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.

25. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности.

26. Метод Тейлора для решения задачи Коши.

27. Метод разделения переменных (метод Фурье) для решения граничных задач уравнений гиперболического типа.

28. Уравнения Лапласа и Пуассона.

29. Фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве.

30. Постановка основных краевых задач: задача Дирихле.

31. Постановка основных краевых задач: задача Неймана.

32. Решение уравнения Лапласа для круга.

33. Сферические функции.

34. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца.

**ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ
ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
05.03.01 Геология, направленность (профиль) «Геофизика»**

(код, направление, профиль)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Шифр дисциплины по РУП	Б1.Б.22		
Дисциплина	«Уравнения математической физики»		
Курс	2	семестр	3
Кафедра	горного дела, наук о Земле и природообустройства		
Ф.И.О. преподавателя, звание, должность	Терещенко Сергей Васильевич, д-р техн.наук, доцент, зав. кафедрой горного дела, наук о Земле и природообустройства		
Общ. трудоемкость _{час/ЗЕТ}	72/2	Кол-во семестров	1
Форма контроля	зачет		
ЛК _{общ./тек. сем.}	16/16	ПР/СМ _{общ./тек. сем.}	32/32
ЛБ _{общ./тек. сем.}	-/-	СРС _{общ./тек. сем.}	24/24

Компетенции обучающегося, формируемые в результате изучения дисциплины:

- способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания математики и естественных наук (ОПК-3).

Код формируемой компетенции	Содержание задания	Количество мероприятий	Максимальное количество баллов	Срок предоставления
<i>Вводный блок</i>				
	Не предусмотрен			
<i>Основной блок</i>				
ОПК-3	Устный опрос.	5	15	В течение семестра
ОПК-3	Решение задач	8	24	В течение семестра
ОПК-3	Контрольная работа	7	21	В течение семестра
Всего:			60	
ОПК-3	Зачет	Вопрос 1	20	В сроки сессии
		Вопрос 2	20	В сроки сессии
Всего:			40	
Итого:			100	
<i>Дополнительный блок</i>				
ОПК-3	Подготовка опорного конспекта		10	по согласованию с преподавателем
ОПК-3	Подготовка глоссария		5	
Всего			15	

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы МАГУ: «не зачет» - 60 баллов и менее, «зачет» - более 61 балла.