Приложение 2 к РПД Линейная алгебра
09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) – Программно-аппаратные комплексы
Форма обучения – заочная
Год набора - 2019

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Информатики и вычислительной техники
2.	Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
3.	Направленность (профиль)	Программно-аппаратные комплексы
4.	Дисциплина (модуль)	Линейная алгебра
5.	Форма обучения	заочная
6.	Год набора	2019

2. Перечень компетенций

– способность применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1); – способность применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем (ОПК-8).

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	**Уметь:**	**Владеть:**	
1. Линейные пространства	ОПК-1 ОПК-8	основы алгебры матриц;основные понятия теории множеств и общей алгебры;основы алгебры векторов	исследовать и решать системы линейных уравнений	навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.	Тест, решение задач
2. Евклидовы пространства	ОПК-1	основные понятия теории множеств и общей алгебры	использовать метод координат в пространствах малой размерности	терминологией линейной алгебры в решении профессиональных задач	Решение задач, подготовка опорного конспекта
3. Линейные операторы	ОПК-1	основы алгебры векторов	применять матричные методы в решении алгебраических задач	навыками решения геометрических задач алгебраическими методами; навыками анализа и решения систем линейных уравнений.	Групповая дискуссия, решение задач (2)
4. Линейные и квадратичные формы	ОПК-1 ОПК-8	применение метода координат в описании геометрических объектов	применять методы линейной алгебры в решении профессиональных задач	терминологией линейной алгебры в решении профессиональных задач	Тест, решение задач, групповая дискуссия

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Тест

Процент правильных ответов	До 20	21-40	41-60	61-80	81-100
Количество баллов за решенный тест	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

4.2. Решение задач

6 баллов выставляется, если обучающийся самостоятельно решил все рекомендованные задачи, правильно изложил все варианты их решения.

4 балла выставляется, если обучающийся решил рекомендованные задачи, с незначительными подсказками со стороны преподавателя, правильно изложил все варианты решения, аргументировав их.

2 балла выставляется, если обучающийся решил рекомендованные задачи, с существенной помощью со стороны преподавателя, изложил некоторые варианты их решения, аргументировав их.

1 балл выставляется, если обучающийся решил рекомендованные задачи, с существенной помощью со стороны преподавателя, не изложив все варианты их решения и не аргументировав их.

4.3. Групповая дискуссия (устные обсуждения проблемы или ситуации)

Критерии оценивания	Баллы
– обучающийся ориентируется в проблеме обсуждения, грамотно высказывает и обосновывает свои суждения, владеет профессиональной терминологией, осознанно применяет теоретические знания, материал излагает логично, грамотно, без ошибок; – при ответе обучающийся демонстрирует связь теории с практикой.	**5**
– обучающийся грамотно излагает материал; ориентируется в проблеме обсуждения, владеет профессиональной терминологией, осознанно применяет теоретические знания, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности; – ответ правильный, полный, с незначительными неточностями или недостаточно полный.	**2**
– обучающийся излагает материал неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, не может доказательно обосновать свои суждения; – обнаруживается недостаточно глубокое понимание изученного материала.	**0**

4.4. Подготовка опорного конспекта

Подготовка материалов опорного конспекта является эффективным инструментом систематизации полученных обучающимся знаний в процессе изучения дисциплины.

Составление опорного конспекта представляет собой вид внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося по созданию краткой информационной структуры, обобщающей и отражающей суть материала лекции, темы учебника. Опорный конспект призван выделить главные объекты изучения, дать им краткую характеристику, используя символы, отразить связь с другими элементами. Основная цель опорного конспекта – облегчить запоминание. В его составлении используются различные базовые понятия, термины, знаки (символы) — опорные сигналы. Опорный конспект может быть представлен системой взаимосвязанных геометрических фигур, содержащих блоки концентрированной информации в виде ступенек логической лестницы; рисунка с дополнительными элементами и др.

Критерии оценки опорного конспекта	Максимальное количество баллов
- подготовка материалов опорного конспекта по изучаемым темам дисциплины только в текстовой форме;	**5**
- подготовка материалов опорного конспекта по изучаемым темам дисциплины в текстовой форме, которая сопровождается: подробными математическими выкладками (выполненными в редакторе формул).	**10**

4.5. Выполнение задания на составление глоссария

	Критерии оценки	Количество баллов
1	аккуратность и грамотность изложения, работа соответствует по оформлению всем требованиям	**4**
2	полнота исследования темы, содержание глоссария соответствует заданной теме	**6**
	ИТОГО:	**10 баллов**

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1. Типовое тестовое задание

1. При каком λ элементы линейного пространства R^3
$x_1 = (3, -2, 5)$, $x_2 = (-4, 2, 1)$, $x_3 = (2, -4, \lambda)$ будут линейно зависимыми?
Ключ: 36

2. Линейное пространство образовано матрицами, имеющими 2 строки и 3 столбца. Сложение и умножение на число задаются обычным для матриц способом. Чему равна размерность пространства?
Ключ: 6

3.Найти размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ключ: 1

4. При каком α отображение $A : R^2 \to R^2$, заданное формулой:
$A(x_1, x_2) = (2x_1 + \alpha, 3x_1 + 2x_2)$, будет линейным оператором?
Ключ: 0

5. Линейный оператор φ задан в базисе e_1, e_2 матицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти образ вектора $e_1 + 2e_2$, в ответе указать сумму его координат.
Ключ: 8

6. Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$,

Вектор $(\beta, 1)$ – собственный вектор для $\boldsymbol{\varphi}$, относящийся к собственному значению $\lambda=2$. Найти β.
Ключ: -2

7. Найти положительный индекс инерции квадратично формы
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
Ключ: 1

8. Найти матрицу квадратичной формы, получаемой из
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
линейной заменой переменных $x_1 = 3y_1+y_2$, $x_2 = 2y_1 - y_2$.
В ответе указать элемент, стоящий в правом верхнем углу матрицы.

Ключ: -1

5.2. Примеры решения задач:

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Запишем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0$$

Корень уравнения $\lambda = 2$ имеет кратность 3 и является собственным значением линейного оператора.

Координаты собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 2$ найдем из однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\cdot X = O$ при $\lambda = 2$:

$-2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0$
$-4x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0$
$-2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0$

Вычеркнув из системы второе и третье уравнения, придем к уравнению:
$-2x_1 + x_2 = 0.$

Ранг матрицы системы $r = 1$, выбираем базисной неизвестной x_2, x_1 и x_3 будут свободными неизвестными. Решение СЛАУ может быть записано в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $X = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,0,1)$

Векторы $\boldsymbol{e_1} = (1,2,0)$ и $\boldsymbol{e_2} = (0,0,1)$ порождают собственное подпространство оператора. Любой ненулевой вектор этого подпространства является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda = 2$

5.3. Примеры вопросов к групповой дискуссии

Тема: Линейные пространства

1. Дайте определение линейного пространства и приведите примеры линейных пространств.
2. Какие вектора называют линейно зависимыми и линейно независимыми?
3. Как определяется размерность линейного пространства и какие пространства называют бесконечномерными?
4. Как можно представить любой вектор в линейном пространстве?

5. Что такое линейная комбинация векторов?
6. Сколько линейно независимых векторов содержит пространство R^n?
7. Чему равна размерность пространства непрерывных функций C(R).
8. Дайте определение базиса линейного пространства и приведите примеры базисов линейных пространств.
9. Как выполняется преобразование координат вектора при замене базиса?
10. В пространстве $P^2(R)$ многочленов степени не выше второй даны две системы многочленов: $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $f_1 = (x+1)^2$, $f_2 = (x-1)^2$, $f_3 = x^2$.
Доказать, что каждая система является базисом пространства $P^2(R)$. Найти матрицу S перехода от базиса (e) к базису (f). Определить координаты квадратного трехчлена $p = x^2 - x + 1$ относительно базисов (e) и (f).
11. Сформулируйте свойства матрицы перехода от одного базиса к другому.
12. Что такое взаимно-однозначное соответствие?
13. Какие линейные пространства называют изоморфными?
14. Установите между пространствами U=R и V=R взаимно однозначное соответствие, которое: а) является изоморфизмом; б) не является изоморфизмом.
15. Пусть пространство U изоморфно пространству V, а V изоморфно пространству W. Будут ли пространства U и W также изоморфны?
16. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств
$L_1 = < a_1, a_2, a_3 >$ и $L_2 = < b_1, b_2, b_3 >$, если :

$$a_1 = (1, 2, 1,-2)^T \qquad b_1 = (1, 1, 1, 1)^T$$
$$a_2 = (2,3,1,0)^T \qquad b_2 = (1, 0,1,-1)^T$$
$$a_3 = (1, 2,2,-3)^T \qquad b_3 = (1, 3,0, - 4)^T$$

5.4. Вопросы к экзамену

1. Линейное (векторное) пространство, его свойства. Аксиомы Вейля.
2. Линейная независимость векторов, ее свойства. Базис.
3. Координаты вектора, действия над ними. Размерность линейного пространства и базис. Матрица перехода при замене базиса, ее свойства.
4. Изоморфизм линейных пространств.
5. Линейное подпространство. Линейная оболочка векторов.
6. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Размерность суммы подпространств. Прямое дополнение.
7. Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения, неравенство Коши-Буняковского.
8. Норма, нормированное пространство. Евклидова (сферическая), октаэдрическая, кубическая норма. Угол между векторами.
9. Ортогональная система векторов, ее линейная независимость. Матрица Грама.
10. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
11. Ортогональное дополнение. Разложение произвольного вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую. Унитарные пространства.
12. Линейный оператор (линейное отображение). Ядро и образ оператора. Дефект и ранг оператора, их взаимосвязь.
13. Матрица линейного оператора, вычисления в координатах. Ранг матрицы линейного оператора.
14. Изменение матрицы оператора при замене базиса. Подобные матрицы.
15. Произведение линейных операторов, обратный оператор. Линейное пространство линейных операторов, его изоморфизм пространству матриц.
16. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора.
17. Собственные вектора и собственные числа линейного оператора, их связь с характеристическим многочленом.

18. Линейное подпространство собственных векторов, инвариантное подпространство.
19. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным числам.
20. Операторы простой структуры.
21. Матрица линейного оператора: в базисе из собственных векторов, в случае прямой суммы инвариантных подпространств.
22. Инвариантное подпространство пары комплексно сопряженных корней. Матрица оператора в случае различных комплексных и действительных корней.
23. Жорданова нормальная форма.
24. Сопряженный оператор, его матрица. Самосопряженный оператор, его матрица.
25. Собственные числа и собственные векторы самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в случае различных корней.
26. Ортогональное дополнение инвариантного подпространства, размерность подпространства собственных векторов.
27. Матрица самосопряженного оператора в случае кратных корней.
28. Ортогональный оператор, его свойства. Ортогональный оператор и ортонормированные базисы.
29. Матрица ортогонального оператора. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
30. Определение линейной функции над векторным пространством. Сопряженное пространство. Линейные формы в евклидовых пространствах.
31. Билинейные формы. Матрица билинейной формы.
32. Квадратичная форма, ее матрица, матричная запись квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании.
33. Нормированные и ортогональные столбцы, ортогональная матрица. Условия ортогональности матрицы.
34. Свойства ортогональных матриц. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
35. Теорема Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм.
36. Положительно определенная квадратичная форма, условия положительной определенности. Критерий Сильвестра.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
09.03.02 Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) «Программно-аппаратные комплексы»

(код, направление, профиль)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА

Шифр дисциплины по РУП	**Б1.О.13**						
Дисциплина	**Линейная алгебра**						
Курс	**1-2**	семестр	**2-3**				
Кафедра	**Общих дисциплин**						
Ф.И.О. преподавателя, звание, должность	**Сахаров Ярослав Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общих дисциплин**						
Общ. трудоемкость$_{час/ЗЕТ}$	**144/4**	Кол-во семестров	**2**	Форма контроля	**Экзамен**		
ЛК $_{общ./тек. сем.}$	**4/4**	ПР/СМ$_{общ./тек. сем.}$	**8/8**	ЛБ$_{общ./тек. сем.}$	**-/-**	СРС $_{общ./тек. сем.}$	**123/123**

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

– способность применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1);

– способность применять математические модели, методы и средства проектирования информационных и автоматизированных систем (ОПК-8).

Код формируемой компетенции	Содержание задания	Количество мероприятий	Максимальное количество баллов	Срок предоставления
		Вводный блок		
		Не предусмотрен		
		Основной блок		
ОПК-1 ОПК-8	Решение тестов	2	10	В межсессионный период
ОПК-1 ОПК-8	Групповая дискуссия	2	10	В течение семестра по расписанию занятий
ОПК-1 ОПК-8	Решение комплекса задач	5	30	В межсессионный период
ОПК-1 ОПК-8	Подготовка опорного конспекта	1	10	В межсессионный период
		Всего:	**60**	
ОПК-1 ОПК-8	Экзамен	Вопрос 1 Вопрос 2	20 20	По расписанию сессии
		Всего:	**40**	
		Итого:	**100**	
	Дополнительный блок			
ОПК-1 ОПК-8	Подготовка глоссария		10	по согласованию с преподавателем
		Всего:	**10**	

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы МАГУ: «2» - 60 баллов и менее, «3» - 61-80 баллов, «4» - 81-90 баллов, «5» - 91-100 баллов.