**Приложение 2 к РПД «Уравнения математической физики»**
**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**
**Направленность (профиль) – Электропривод и автоматика**
**Форма обучения – заочная**
**Год набора – 2015**

## ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

### 1. Общие сведения

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Кафедра | Общих дисциплин |
| 2. | Направление подготовки | 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника |
| 3. | Направленность (профиль) | Электропривод и автоматика |
| 4. | Дисциплина (модуль) | Уравнения математической физики |
| 5. | Форма обучения | заочная |
| 6. | Год набора | 2015 |

### 2. Перечень компетенций

- - способностью обрабатывать результаты экспериментов (ПК-2);
- способностью применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач (ОПК-2).

## 3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

| Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины) | Формируемая компетенция | Критерии и показатели оценивания компетенций | | | Формы контроля сформированности компетенций |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Знать: | Уметь: | Владеть: | |
| 1. **Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка.** | ОПК-2, ПК-2 | вид уравнений первого порядка, разрешенные относительно производной; уравнения с разделенными переменными и приводящиеся к ним; линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной | определять тип уравнения первого порядка; решать задачу Коши. | методами решений уравнений первого порядка разрешенных и неразрешенный относительно производной | Решение задач. Контрольная работа №1 |
| 2. **Обыкновенные дифференциальные уравнения *n*-го порядка.** | ОПК-2, ПК-2 | линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами; однородные и неоднородные линейные уравнения и методы их решений; линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами; уравнения Эйлера | определять тип уравнения *n*-го порядка; решать задачу Коши. | методами решений линейных однородных и неоднородных уравнений *n*-го порядка с постоянными и переменными коэффициентами | Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №2. |
| **3. Уравнения в частных производных 1-го порядка.** | ОПК-2, ПК-2 | линейные и квазилинейные уравнения в частных производных; метод характеристик для решения уравнений в частных производных первого порядка и методы их интегрирования. Как ставится и решается задача Коши | определять тип уравнения; решать задачу Коши | методами решений уравнения в частных производных первого порядка | Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №3 |
| 4. **Основные уравнения математической физики.** | ОПК-2, ПК-2 | уравнение колебаний; уравнение теплопроводности и диффузии; уравнения гидродинамики и звуковых волн. | определять тип уравнения | алгоритмами решения уравнений | Устный опрос. Решение задач. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **5. Приведение уравнений к каноническому виду.** | ОПК-2, ПК-2 | определение типа уравнения в частных производных 2-го порядка; метод характеристик для приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду | определять тип уравнения; приводить уравнение к каноническому виду | методом характеристик для приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду | Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №4 |
| 6. **Уравнения гиперболического типа.** | ОПК-2, ПК-2 | задачу Коши для уравнений гиперболического типа; формулу Даламбера для свободных и вынужденных колебаний; методы решения краевых задач; задачу Штурма-Лиувилля; метод Фурье | использовать формулу Даламбера для решения задачи Коши | методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач | Решение задач. Контрольная работа №5 |
| 7. **Уравнения параболического типа.** | ОПК-2, ПК-2 | о физических задачах, приводящих к уравнениям параболического типа; метод Тейлора для решения задачи Коши; метод разделения переменных (метод Фурье) для решения граничных задач уравнений гиперболического типа | определять тип уравнения; использовать метод Тейлора для решения задачи Коши определять тип уравнения | методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач | Устный опрос. Решение задач. Контрольная работа №6 |
| 8. **Уравнения эллиптического типа.** | ОПК-2, ПК-2 | уравнения Лапласа и Пуассона; о фундаментальном решении уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве; как ставятся основные краевые задачи: задача Дирихле и Неймана; о сферических функциях. | решать уравнения Лапласа для круга | методом Фурье (разделения переменных) для решения начально-граничных задач | Решение задач. Контрольная работа №7 |

**4. Критерии и шкалы оценивания**

На выбор преподавателя возможны дополнительные методы оценивания работы студентов перечисленные ниже и не указанные в технологической карте дисциплины.

**Решение задач**

3 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные на практическом занятии задачи.

2 балл выставляется, если студент выполнил не менее 50% рекомендованных задач.

1 балл выставляется, если студент выполнил не менее 20% рекомендованных задач.

**4.2. Контрольная работа**

3 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

2 балла выставляется, если студент выполнил два рекомендованных задания, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

1 балл выставляется, если студент выполнил одно задание.

0 баллов – студент не выполнил рекомендованные задания.

**Устный опрос**

| Процент правильных ответов | До 60 | 60-80 | 80-100 |
|---|---|---|---|
| Количество баллов за ответы | 1 | 2 | 3 |

**5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы**

***5.1. Типовые контрольные задания***

***1. <u>Уравнения первого порядка</u>***

1.1.Решить уравнение: $x\sin t + x^{/}\cos t = 1$

1.2. Решить задачу Коши: $x^{/} + 3x\cdot tg3t = \sin 6t, \qquad x(0) = \frac{1}{3}$.

1.3. Решить уравнение: $y = \exp(y^{/})(y^{/} - 1)$

***2. <u>Уравнения «n»-го порядка</u>***

2.1. Найти общее решение уравнения: $y^{//} + 4y' - 6y = 0$

2.2. Найти общее, частное решение и решение задачи Коши уравнения:

$$y^{//} - y = xe^{x} + e^{2x}, \qquad y(0) = \frac{1}{3}, \qquad y^{/}(0) = \frac{5}{12}.$$

2.3. Решить уравнение Эйлера: $x^2 y^{//} - xy^{/} + y = 0$.

***3. <u>Уравнения в частных производных первого порядка</u>***

3.1. Найти решение уравнения

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

3.2.Найти общий интеграл уравнения: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$.

3.3.Найти решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $z = -y$ при $x = 1$.

## 4. Приведение уравнений к каноническому виду

4.1. $4u_{xx}-8u_{xy}+u_{yy}-2u_x+2u_y-3u=0$.

4.2. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

4.3. $4y^2u_{xx}+e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$.

## 5. Уравнения гиперболического типа

5.1. Решить задачу Коши:

5.1.1. $u_{tt}=4u_{xx}+xt$; $u\big|_{t=0}=x^2$, $u_t\big|_{t=0}=x$

5.1.2. $u_{tt}-\Delta u=0$; $u\big|_{t=0}=x^3+z^3$, $u_t\big|_{t=0}=y^3$

5.2. Решить начально-граничную задачу:

$u_{tt}-4u_{xx}=4\sin^3 x+16\sin^5 x,\ 0<x<\pi;\ u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=0;\ u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=\pi}=0$.

## 6. Уравнения параболического типа

6.1. Решить задачу Коши:

6.1.1. $u_t=u_{xx}+3t^2$; $u\big|_{t=0}=\sin x$.

6.1.2. $u_t-\Delta u=xzt$; $u\big|_{t=0}=xy^3+x^2z^2$.

6.2. Решить начально-граничную задачу:

$u_t-4u_{xx}=0;\ 0<x<4;\ u\big|_{t=0}=2\sin^3\pi x+\sin 4\pi x,\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=4}=0$.

## 7. Уравнения эллиптического типа

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге

7.1. $\Delta u=0,\quad 0\le r\le 2,\quad u\big|_{r=2}=f(\varphi)=2\cos^3\varphi-\sin^3\varphi+\sin\varphi$.

7.2. $\Delta u=0,\quad 0\le r\le 1,\quad u\big|_{r=1}=f(\varphi)=\cos^3\varphi-2\sin^3\varphi-\cos\varphi+\sin\varphi$.

7.3. $\Delta u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}=2\cos\varphi+3\sin 3\varphi.$

### 5.2. Типовые задачи для практических занятий

***Пример 1***. Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени $t$ имеющего начальную скорость $v_0$, двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги $F=b-kv$ и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при $t=0$ сила тяги определяется выражением $F(t)=F_0=b-kv_0$.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. $v=v(t)$, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \text{ где } F=b\text{-}kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m}. \qquad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b - kv} = \frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (*)

$$-\frac{1}{k}\ln|b - kv| = \frac{1}{m}t + C \text{ или } t = -\frac{m}{k}\ln|b - kv| + C \qquad (**)$$

В решении (**) удовлетворим начальному условию – $v(0)=v_0$.

$$0 = -\frac{m}{k}\ln|b - kv_0| + C \Rightarrow C = \frac{m}{k}\ln|b - kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной $C$ в общее решение (**), получим решение задачи Коши:

$$t = -\frac{m}{k}\ln|b - kv| + \frac{m}{k}\ln|b - kv_0|$$

или

$$t = \frac{m}{k}\ln\left|\frac{b - kv_0}{b - kv}\right| = \{F_0 = b - kv_0,\ F = b - kv\} = \frac{m}{k}\ln\left|\frac{F_0}{F}\right|.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t\frac{k}{m} = \ln\left|\frac{F_0}{F}\right| \Rightarrow \frac{F_0}{F} = e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F = F_0\,e^{-\frac{k}{m}t}.\blacktriangle$$

***<u>Пример 2.</u>*** Рассмотрим вентиляцию забоя объемом $V$(м$^3$), в котором в процессе проведения работ накапливаются вредные газообразные выделения в количестве $Z$ в час. Пусть обмен воздуха в течении 1 часа составляет $M$ (м$^3$/ч), причем приточный воздух содержит вредные вещества в концентрации $\mu$ на 1 м$^3$. Требуется найти концентрацию $Z$ (на 1 м$^3$) вредных выделений в забое через время $t$ после начала работы, если начальное значение этой концентрации (остаток загрязнений от предыдущей смены) составляет $Z_0$.

▲ За малый промежуток времени $dt$ концентрация вредных выделений $Z$ увеличивается на $dZ$. Следовательно общее количество выделений составит $VdZ$ и оно будет состоять из выделений, принесенных приточным воздухом - $\mu Mdt$, и выделений образовавшихся в процессе работы - $Zdt$ за вычетом количества вредных выделений, которое содержалось в извлеченном из забоя за время $dt$ воздухе. Предположим, что за малый промежуток времени $dt$ изменение концентрации вредных выделений равно – $ZMdt$. Следовательно, уравнение вентиляции забоя имеет вид:

$$VdZ = \mu Mdt + Zdt - ZMdt \text{ или } \frac{dZ}{dt} - \frac{1 - M}{V}Z = \frac{\mu M}{V}$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением, которое будем решать используя сразу формулу общего решения (1.51):

$$Z = e^{\frac{1-M}{V}\int dt}\left[C_1 + \frac{\mu M}{V}\int e^{-\frac{1-M}{V}\int dt}dt\right] = e^{\frac{1-M}{V}t}\left[C_1 - \frac{\mu M}{V}\cdot\frac{V}{1 - M}e^{-\frac{1-M}{V}t}\right] \text{или}$$

$$Z = C_1 e^{\frac{1-M}{V}t} - \frac{\mu M}{1 - M}.$$

Удовлетворяя начальному условию $Z(0)=Z_0$, определим значение произвольной постоянной $Z_0=C_1-\frac{\mu M}{1-M}$, $\Rightarrow C_1=Z_0+\frac{\mu M}{1-M}$. Таким образом, окончательное решение исходной задачи имеет вид:

$$Z=Z_0e^{\frac{1-M}{V}t}+\frac{\mu M}{1-M}\left(e^{\frac{1-M}{V}t}-1\right).▲$$

***<u>Пример 3</u>.*** Найти силу тяги состава с рудой по истечении времени $t$ имеющего начальную скорость $v_0$, двигающегося с ускорением прямопропорциональным силе тяги $F=b-kv$ и обратно пропорциональным массе состава с рудой. Если в начальный момент времени при $t=0$ сила тяги определяется выражением $F(t)=F_0=b-kv_0$.

▲ скорость движения состава с рудой является функцией времени, т.е. ***v= v(t)***, а его ускорение определяется 2-м законом Ньютона

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}, \text{ где } F=b-kv.$$

Поэтому дифференциальное уравнение исходной задачи будет иметь вид:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{b-kv}{m}. \qquad (*)$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dv}{b-kv}=\frac{dt}{m},$$

Интегрируя которое, найдем общее решение уравнения (*)

$$-\frac{1}{k}\ln|b-kv|=\frac{1}{m}t+C \text{ или } t=-\frac{m}{k}\ln|b-kv|+C \qquad (**)$$

В решении (**) удовлетворим начальному условию – $v(0)=v_0$.

$$0=-\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|+C \Rightarrow C=\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|.$$

Подставив найденное значение постоянной $C$ в общее решение (**), получим решение задачи Коши:

$$t=-\frac{m}{k}\ln|b-kv|+\frac{m}{k}\ln|b-kv_0|$$

или

$$t=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{b-kv_0}{b-kv}\right|=\{F_0=b-kv_0,\ F=b-kv\}=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{F_0}{F}\right|.$$

Таким образом, искомую силу тяги состава с рудой в любой момент времени, найдем из последнего равенства, избавившись в нем от логарифма

$$t\frac{k}{m}=\ln\left|\frac{F_0}{F}\right| \Rightarrow \frac{F_0}{F}=e^{\frac{k}{m}t} \Rightarrow F=F_0\,e^{-\frac{k}{m}t}.▲$$

***<u>Пример 4.</u>*** Трубопровод тепловой магистрали (диаметр 20 см) защищенный изоляцией толщиной 10 см отапливает рабочее помещение при этом температура трубы 160ºС, а внешнего ее покрова 30ºС. Определить распределение температуры внутри изоляции, если коэффициент теплопроводности $k$ = 0,00017, а также количество теплоты, отдаваемой 1 м трубы.

▲ Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура $T$ в каждой его точке есть функция только одной координаты $x$, то, в соответствии с законом теплопроводности Фурье, количество теплоты, испускаемое в секунду будет равно

$$Q = -\lambda S(x)\frac{dT}{dx} = \text{const} \qquad (1)$$

где $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, а площадь сечения тела $S(x)$ определяется по формуле

$S(x)=2\pi xl$,

где $x$– радиус трубопровода, $l$ – длина трубы, следовательно, уравнение (1) можно записать в виде

$$Q = -\lambda S(x)\frac{dT}{dx} = -2\lambda\pi xl\,\frac{dT}{dx}$$

или

$$Q + 2\lambda\pi xl\,\frac{dT}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (2) получим

$$dT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l}\cdot\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

По условию задачи необходимо определить распределение температуры внутри изоляции. Поэтому сначала левую часть уравнения (3) интегрируем в пределах от 160ºC до 30ºC, а правую часть интегрируем в пределах от 10 до 20 см.

$$\int_{160}^{30} dtT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x};$$

После интегрирования уравнения (3), находим

$$T\Big|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln x\Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln 2 \qquad (4)$$

Затем, проинтегрируем левую часть уравнения (3) в пределах от 160ºC до некоторой температуры $T$, а правую часть интегрируем в пределах от 10 до $x$ см. После интегрирования уравнения (3), находим

$$\int_{160}^{T} dtT = -\frac{Q}{2\lambda\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x};$$

$$T\Big|_{160}^{T} = T - 160 = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln x\Big|_{10}^{x} = -\frac{Q}{0{,}00017\cdot 2\pi l}\cdot \ln 0{,}1x \qquad (5)$$

Разделив почленно уравнение (5) на уравнение (4), получим

$$\frac{T-160}{-130} = \frac{\ln 0.1x}{\ln 2}$$

Из этого уравнения следует, что закон распределения температуры внутри изоляции будет иметь вид

$$T = 591{,}8 - 431{,}8\ln x$$

Кроме того, по условию задачи необходимо определить количество теплоты отдаваемой 1 м трубы. Поэтому для того, чтобы выполнить условие задачи необходимо из уравнения (4) при $l$ = 100 см выразить $Q$ и рассчитать его значение

$$Q = \frac{130\cdot 0.00017\cdot 2\cdot\pi\cdot 100}{\ln 2} = \frac{130\cdot 0.00017\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 100}{0{,}69315} = 1730600\ \textit{ккал}\ \blacktriangle$$

***<u>Пример 5</u>***. Кусок рудной массы $m$ падает в рудоспуск под действием силы тяжести, при этом воздух оказывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости падения. Найти закон движения куска.

▲ Пусть $s$ — расстояние, пройденное телом к моменту $t$. Тогда движение определяется уравнением

$$m\frac{d^2s}{dt}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

которое может быть представлено в виде

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2 \tag{1}$$

где скорость $v=\dfrac{ds}{dt}$. Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Риккати.

Разделяя в нем переменные, имеем

$$\frac{mdv}{mg-kv^2}=dt$$

или после сокращения левой части равенства на $m$

$$\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=t+C \tag{2}$$

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (2) применяем метод неопределенных коэффициентов, и тогда

$$\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=\int\frac{Adv}{\sqrt{g}-\sqrt{\frac{k}{m}}v}+\int\frac{Bdv}{\sqrt{g}+\sqrt{\frac{k}{m}}v} \tag{3}$$

Откуда

$$A-B=0$$

$$A+B=\frac{1}{\sqrt{g}}$$

или

$$A=B=\frac{1}{2\sqrt{g}}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в интеграл (3), имеем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\int\frac{d\left(g+\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g+\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\int\frac{d\left(g-\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}{\left(g-\sqrt{\frac{gk}{m}}v\right)}=t+C$$

Для краткости обозначим $\sqrt{\frac{gk}{m}}=r$. Тогда после умножения равенства на $2\sqrt{\frac{gk}{m}}$ находим

$$\int \frac{d(g+rv)}{g+rv} - \int \frac{d(g-rv)}{g-rv} = 2r(t+C)$$

или

$$\ln(g+rv) - \ln(g-rv) = 2rt + 2rC$$

откуда

$$\ln\left(\frac{g+rv}{g-rv}\right) = 2rt + 2rC \tag{4}$$

Потенцируя уравнение (4), получаем

$$\frac{g+rv}{g-rv} = e^{2rt+2rC} = e^{2rt}e^{2rC} = \left\{e^{2rC} = C_1\right\} = C_1 e^{2rt}$$

Откуда искомая функция имеет вид

$$v = \frac{g}{r} \cdot \frac{\left(C_1 e^{2rt} - 1\right)}{\left(C_1 e^{2rt} + 1\right)}$$

или с учетом того, что $g = \dfrac{r^2 m}{k}$ и $C^* = \dfrac{1}{C_1}$, получим

$$v = \frac{rm}{k} \cdot \frac{\left(e^{rt} - C^* e^{-rt}\right)}{\left(e^{rt} + C^* e^{-rt}\right)} \tag{5}$$

Из уравнения (5) очевидно, что при *t*, стремящемся к бесконечности, скорость $v$ достигает предельного значения

$v_{\max} = V,$

для которого

$$V = \frac{rm}{k} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Следовательно, уравнение (5) записывается в виде

$$v = V \cdot \frac{\left(e^{rt} - C^* e^{-rt}\right)}{\left(e^{rt} + C^* e^{-rt}\right)} \tag{6}$$

Начальное условие: при $t = 0$ $v = v_0$.

Пусть ради краткости записи $u_0 = v_0/V$. Тогда постоянная интегрирования $C^*$ в уравнении (6) принимает значение

$$C^* = \frac{1-u_0}{1+u_0}$$

Подставляя это значение в уравнение (6), замечаем, что $v$ может быть записана в виде

$$v = V \cdot \frac{\left(u_0 + \mathrm{th}\, rt\right)}{\left(1 + u_0 \mathrm{th}\, rt\right)}$$

Принимая, что при $t = 0$ $s = 0$, можем теперь определить закон движения $s$:

$$s = \int_0^t v(t)dt = \frac{V}{r}\ln\left(\mathrm{ch}\, rt + u_0 \mathrm{sh}\, rt\right)$$

Подставляя $r = \dfrac{g}{V}$ и $u_0 = \dfrac{v_0}{V}$ в это равенство, окончательно получаем искомый закон движения

$$s=\frac{V^2}{g}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{V}+\frac{v_0}{V}\operatorname{sh}\frac{gt}{V}\right).\blacktriangle$$

***Пример 6.*** Найти решения уравнения:

$$\left(x^3y-3x^2y+y^3\right)dx+2x^3dy=0.$$

▲ Разделив обе части исходного уравнения на $dx\neq0$ ($x=0$ – очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3\frac{dy}{dx}+\left(x^3-3x^2\right)y=-y^3.$$

Считая $y\neq0$ ($y=0$ – тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на ($-y^3$) и делаем замену $z(x)=y^{-2}$. Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3}=z'(x),\quad x^3z'-\left(x^3-3x^2\right)z=1.$$

Решая это уравнение, находим

$$z(x)=C_1x^{-3}e^x-x^{-3}.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения

$$C_1y^2e^x-y^2-x^3=0;\qquad x=0;\qquad y=0.\blacktriangle$$

***Пример 7.*** Найти общее решение уравнения:

$$y'=-y^2+1+x^2.$$

▲Это уравнение является уравнением Риккати, в котором $a(x)=-1$, $b(x)=0$ и $c(x)=1+x^2$. Проверка условия $c(x)=-a(x)x^2-b(x)x+1$. Привело к результату: $1+x^2=1+x^2$. Следовательно, это условие выполняется и за частное решение исходного уравнения можно принять функцию: $y_1=x$. Таким образом, полагая $y=x+\dfrac{1}{z}$ и вычислив $y'=1-z^{-2}z'$, приводим исходное уравнение к неоднородному линейному уравнению: $z'-2xz=1$. Откуда

$$z=e^{x^2}\left(C+\int e^{-x^2}dx\right).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения Риккати имеет вид:

$$y=x+\frac{e^{-x^2}}{C+\int e^{-x^2}dx}.\blacktriangle$$

***Пример 8.*** Найти общий интеграл уравнения:

$$(x+y-1)dx+(x-y^2+2)dy=0.$$

▲ Установим, является ли исходное равнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого проверим, выполняется ли условие Эйлера (1.87). Здесь

$$M(x,y)=x+y-1,\ \text{а}\ N(x,y)=x-y^2+2.$$

Вычислим производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$, следовательно, условие Эйлера выполнено, и исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию *u(x,y)* по изложенной выше схеме, а именно, предположим, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y - 1,$$

отсюда

$$u(x,y) = \int (x + y - 1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + \varphi(y).$$

Далее потребуем от *u(x,y)* обеспечения равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x_2}{2} + xy - x + \varphi(y)\right] = N(x,y) = x - y^2 + 2,$$

или $0 + x - 0 + \varphi'(y) = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 2$, или $\varphi'(y) = -y^2 + 2$. Следовательно, $\varphi(y) = \int (-y^2 + 2)dy = -\frac{y^3}{3} + 2y$.

Таким образом, искомая функция и соответственно общий интеграл исходного уравнения будут иметь вид:

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y = C.$$

Получим общий интеграл исходного уравнения, потребовав выполнения равенства $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$:

$u(x,y) = \int \left(x - y^2 + 2\right)dy + \psi(x) = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \psi(x)$, а теперь потребуем, чтобы выполнялось $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$: $y + \psi'(x) = x + y - 1$. Найдем $\psi(x) = \int \left(x - 1\right)dx = \frac{x^2}{2} - x$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$C = xy - \frac{y^3}{3} + 2y + \frac{x^2}{2} - x.$$

Следовательно, независимо от того, какое из условий (1.86) будет выполняться в первую очередь, общий интеграл исходного уравнения будет одним и тем же.

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (1.89):

$$\int_{x_0}^{x} (x + y - 1)dx + \int (x_0 - y^2 + 2)dy = C.$$

Выполним интегрирование:

$$\left(\frac{x^2}{2} + xy - x\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \left(x_0 y - \frac{y^3}{3} + 2y\right)\Bigg|_{y_0}^{y} = C,$$

или

$$\frac{x^2}{2} + xy - x - \left(\frac{x_0^2}{2} + x_0 y - x_0\right) + \left(x_0 y - \frac{y^3}{3} + 2y\right) - \left(x_0 y_0 - \frac{y_0^3}{3} + 2y_0\right) = C,$$

т.к. $x_0, y_0$ можно брать произвольно, то, обозначив $C_1 = C + \frac{x_0^2}{2} - x_0 + x_0 y_0 + 2y_0 - \frac{y_0^3}{3}$, окончательно получим

$$C_1 = \frac{x^2}{2} + xy - x - \frac{y^3}{3} + 2y. \blacktriangle$$

***Пример 9.*** Найти решения уравнения: $y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$.

▲ Разрешив это уравнение относительно $x$ и, полагая в этом уравнении $y' = p$, получим $x = \frac{y}{p}\ln p$. Так как $dy = pdx$, то

$$dy = pd\left(\frac{y}{p}\ln p\right) = \frac{y}{p}dp + \ln p dy - \frac{y}{p}\ln p dp,$$

или

$$(1 - \ln p)\left(dy - \frac{y}{p}dp\right) = 0.$$

Из этого уравнения находим: $p = e$ и $p = Cy$. Таким образом, решения исходного уравнения имеют вид:

$$x = \frac{y}{e} \text{ и } Cx = \ln Cy.\blacktriangle$$

***Пример 10.*** Найти общее решение уравнения: $y'' - y = 0$.

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$.

2. Найдем корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$.

3. Поскольку корни действительные и различные, то по правилу 1 им ставятся в соответствие функции $y_1 = e^x$, и $y_2 = e^{-x}$, которые составляют фундаментальную систему линейно независимых решений исходного уравнения. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.\blacktriangle$$

*Пример 24.* Найти общее решение уравнения:

$y^{(5)} - 5y^{(4)} + 18y''' - 34y'' + 45y' - 25y = 0$.

▲ 1. Запишем характеристическое уравнение:

$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 18\lambda^3 - 34\lambda^2 + 45\lambda - 25 = 0$.

2. Это характеристическое уравнение имеет корни:

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i, \ \lambda_{4,5} = 1 \pm 2i$.

**3. Мы видим, что среди корней характеристического уравнения есть как действительные и различные корни, так и комплексно сопряженные, причем комплексные корни являются кратными. Поэтому для составления фундаментальной системы линейно независимых решений воспользуемся правилами 1, 2 и 3. Корню $\lambda_1 = 1$ соответствует решение $y_1 = e^x$, а каждому из двукратных корней $\lambda_{2,4} = 1 + 2i$ и $\lambda_{3,5} = 1 - 2i$, отвечают решения:** $y_2 = e^x\cos 2x, \ y_3 = xe^x\cos 2x, \ y_4 = e^x\sin 2x, \ y_5 = xe^x\sin 2x.$ **Совокупность этих пяти решений $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ - образует фундаментальную систему линейно независимых решений. Следовательно, общее решение запишется так:**

$y = C_1 e^x + e^x\left[(C_2 + xC_3)\cos 2x + (C_4 x + C_5)\sin 2x\right].$▲

***Пример 11.*** Найти частное и общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

▲ В соответствии с методом Лагранжа, составим соответствующее этому неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами однородное уравнение

$$y'' - 4y + 5y = 0$$

и решим его. Для этого запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Это характеристическое уравнение имеет корни: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

**Мы видим, что корни характеристического уравнения комплексные, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:**

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

Будем искать частное решение исходного уравнения в виде

$$y = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x. \qquad (*)$$

**Составим систему**

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{2x} \cos x + C_2'(x) e^{2x} \sin x = 0 \\ C_1'(x)\left(2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x\right) + C_2'(x)\left(2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x\right) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases}$$

или сокращая на $e^{2x}$,

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}. \qquad (**)$$

Решить эту систему относительно $C_1'$ и $C_2'$ можно различными способами, например, используя правило Крамера. В данном случае удобнее сначала преобразовать второе уравнение, а именно, умножить обе его части первого уравнения на –2 и затем прибавить полученный результат ко второму. В итоге получим уравнение:

$$C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

и, следовательно, этим уравнением можно заменить второе уравнение в системе (**)

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)(\cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} x, \quad \Rightarrow C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\cos x|,$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1} = 1, \quad \Rightarrow C_2(x) = \int dx = x.$$

Подставляя полученные значения $C_1'$ и $C_2'$ в (*), получим частное решение исходного неоднородного уравнения

$$y_{частное}(x) = e^{2x}\left(\cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x\right).$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{2x}\left(\cos x\cdot\ln|\cos x|+x\sin x\right).\blacktriangle$$

***Пример 12.*** Найти частное решение уравнения: $y''-y=xe^x$.

▲ 1. Для правой части исходного уравнения определяем параметры *$\alpha,\beta,q,l$:* *$\alpha=1$, $\beta=0$, $q=1$.*

2. Корни характеристического уравнения $\lambda^2-1=0$ действительные и различные, $\lambda_{1,2}=\pm1$. Учитывая, что число $(\alpha+i\beta)=1$ совпадает с корнем $\lambda_1=1$.кратности 1, то тогда $s$=1, и $m=\max(q,l)$= 1. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_ч(x)=e^x\left(A_0x+A_1\right)x.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_ч(x)$ и ее второй производной

$$y_ч''(x)=e^x\left[A_0x^2+x\left(4A_0+A_1\right)+2A_1+2A_0\right].$$

После преобразований (сокращения на $e^x$ и приведения подобных) получаем равенство:

$$4A_0x+2A_0+2A_1=x.$$

В этом равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях функции переменной x в правой и левой частях:

$$\begin{matrix} x^1 & : & 4A_0=1 \\ x^0 & : & 2A_0+2A_1=0 \end{matrix}$$, откуда следует, что $A_0=\dfrac{1}{4},\ \ A_1=-\dfrac{1}{4}$.

Полученные значения неопределенных коэффициентов $A_0$ и $A_1$ подставив в вид искомого частного решения, получим окончательно:

$$y_ч(x)=\frac{1}{4}e^x\left(x^2-x\right).\blacktriangle$$

***Пример 13.*** Найти частное решение уравнения:

$$y'''-y''+3y'+5y=5e^{2x}\cos x+4e^{-x}.$$

▲ Прежде всего, функцию $f(x)$ представим в виде суммы двух функций $f_1(x)=5e^{2x}\cos x$ и $f_2(x)=4e^{-x}$. Для каждого случая будем подбирать свое частное решение исходного уравнения.

1. Для функции $f_1(x)$ определяем параметры *$\alpha,\beta,q,l$: $\alpha=2$, $\beta=1$, $q=0$*, а для функции $f_2(x)$ соответственно $\alpha=-1$, $\beta=0$, $q=0$.

2. Характеристическое уравнение $\lambda^3-\lambda^2+3\lambda+5=0$ имеет корни:

$$\lambda_1=-1,\ \ \lambda_{2,3}=1\pm2i.$$

Учитывая, что для функции $f_1(x)$ число $(\alpha+i\beta)=2+i$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому $s$=0, а для функции $f_2(x)$ число $(\alpha+i\beta)=-1$совпадает с корнем $\lambda_1$ кратности 1. Исходя из этого, можно выписать частное решение:

$$y_ч(x)=y_{ч1}(x)+y_{ч2}(x)=e^{2x}\left(A_0\cos x+B_0\sin x\right)+D_0xe^{-x}.$$

3. Подставляем в исходное уравнение выражения для $y_ч(x)$ и его производных и находим значения неопределенных коэффициентов $A_0,B_0,D_0$. Для удобства определения этих коэффициентов подставим $y_{ч1}(x)$ в уравнение с правой частью $f_1(x)$, а $y_{ч2}(x)$ в уравнение с правой частью $f_2(x)$.

Подставляем $y_{ч1}(x)=e^{2x}\left(A_0\cos x+B_0\sin x\right)$ и производные:

$$y'_{ч1}(x)=e^{2x}(2A_0\cos x+2B_0\sin x-A_0\sin x+B_0\cos x),$$
$$y''_{ч1}(x)=e^{2x}(3A_0\cos x+3B_0\sin x-4A_0\sin x+4B_0\cos x),$$
$$y'''_{ч1}(x)=e^{2x}(2A_0\cos x+2B_0\sin x-11A_0\sin x+11B_0\cos x)$$

в исходное уравнение с правой частью $f_1(x)$ = $5e^{2x}\cos x$ .Сокращая на $e^{2x}$ и приравнивая коэффициенты при cos$x$ и sin$x$ в правой и левой частях полученного равенства, будем иметь систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}2A_0+11B_0-3A_0-4B_0+6A_0+3B_0+5A_0=5,\\ 2B_0-11A_0-3B_0+4A_0+6B_0-3A_0+5B_0=0,\end{cases}$$

или после преобразований

$$\begin{cases}10A_0+10B_0=5\\ -10A_0+10B_0=0,\end{cases}$$

откуда находим, что

$$A_0=B_0=\frac{1}{4},\ \Rightarrow y_{ч1}(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(\cos x+\sin x).$$

Далее подставляем функцию $f_2(x)$ = $D_0xe^{-x}$ и ее производные:

$$y'_{ч2}(x)=D_0e^{-x}(-x+1),\ \ y''_{ч2}(x)=D_0e^{-x}(x-2),\ \ y'''_{ч2}(x)=D_0e^{-x}(3-x)$$

в исходное уравнение с правой частью равной $4e^{-x}$. Сократив на $e^{-x}$, получим равенство $8D_0=4$, то есть $D_0$ = ½, следовательно

$$y_{ч2}(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения запишем в виде суммы двух частных решений, и окончательно оно будет иметь вид:

$$y_ч(x)=y_{ч1}(x)+y_{ч2}(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}xe^{-x}.\blacktriangle$$

***<u>Пример 14.</u>*** Найти решение уравнения: $x^2y''-xy'+y=0$.

▲ Полагая $x=e^t$ или $t=\ln x$, найдем $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной $t$, обозначив точками дифференцирование по $t$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}=\dot{y}e^{-t},$$
$$y''=\frac{d}{dt}(y')\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})\cdot e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}.$$

Подставив $\dot{y},\ddot{y}$ в исходное уравнение, получим

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})-e^t\cdot e^{-t}\cdot y+y=0,\ \text{или}\ \ddot{y}-2\dot{y}+y=0.$$

Следовательно, мы получили однородное линейное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_1=\lambda_2=1$. Поскольку корни действительные и кратные, с кратностью равной двум, то общее решение будет иметь вид:

$$y(t)=(C_1+tC_2)e^t.$$

Перейдя к переменной $x$, окончательно получим общее решение исходного уравнения

$$y(x)=(C_1+C_2\ln x)x.\blacktriangle$$

***<u>Пример 15.</u>*** Найти решение уравнения:

$$x^2y'' - xy' + y = \cos\ln x.$$

▲ Полагая $x = e^t$ или $t = \ln x$, найдем $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{-t}$.

Вычислим производные по новой переменной $t$, обозначив точками дифференцирование по $t$:

$$y' = \dot{y}e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}.$$

Подставив $\dot{y}, \ddot{y}$ в исходное уравнение, получим

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \cos t. \; (*)$$

Это неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами Общее решение соответствующего ему однородного уравнения имеет вид

$$y(t) = (C_1 + tC_2)e^t,$$

а частное решение можно получить методом неопределенных коэффициентов.

Поскольку параметры правой части неоднородного уравнения (*) равны, соответственно, $\alpha = 0, \beta = 1, q = 0, l = 0$ и число $(\alpha + i\beta) = i\beta$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому $s$=0, и $m$ = max($q$,$l$)= 0. Исходя из этого, можно выписать вид искомого частного решения:

$$y_ч(t) = A_0 \cos t + B_0 \sin t$$

Вычислим производные от $y_ч(t)$

$$\dot{y}_ч(t) = -A_0 \sin t + B_0 \cos t,$$

$$\ddot{y}_ч(t) = -A_0 \cos t - B_0 \sin t$$

и подставив их в уравнение (*), получим

$$-2B_0 \cos t + 2A_0 \sin t \equiv \cos t.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях в правой и левой частях этого уравнения

$$-2B_0 = 1, \;\Rightarrow B_0 = -\frac{1}{2},$$

$$2A_0 = 0, \quad \Rightarrow A_0 = 0.$$

Следовательно, частное решение уравнения (*) имеет вид

$$y_ч(t) = -\frac{1}{2}\sin t,$$

а общее решение уравнения (*) будет выглядеть так:

$$y_{общее}(t) = (C_1 + tC_2)e^t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x - \frac{1}{2}\sin\ln x. ▲$$

***<u>Пример 16.</u>*** Найти общий интеграл и общее решение уравнения

$$u_x - u_y = 0.$$

▲ Запишем для этого уравнения систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -1 \end{cases}$$

Далее запишем симметричную форму этой системы

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{du}{0}.$$

Первый интеграл очевиден

1) $du=0 \;\Rightarrow\; C_1=u$.

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

2) $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-1 \Rightarrow dy+dx=0$,

интегрируя это уравнение, найдем

$$C_2=y+x.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения можно представить в виде

$$\Phi(C_1,C_2)=\Phi[u,x+y],$$

а общее решение будет выглядеть как

$$u=f(x+y).$$

Аналогичным образом решается уравнение

$$u_x+u_y=0$$

и его решение имеет вид

$$u=f(x-y).$$ ▲

***<u>Пример 17.</u>*** Найти общий интеграл и общее решение уравнения $yu\frac{\partial u}{\partial x}+xu\frac{\partial u}{\partial y}=-2xy$.

▲ Запишем для него систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=yu,\\ \dfrac{dy}{dt}=xu,\\ \dfrac{du}{dt}=-2xy.\end{cases}$$

Далее запишем симметричную форму этой системы

$$\frac{dx}{yu}=\frac{dy}{xu}=\frac{du}{-2xy}.$$

Первый интеграл очевиден

1) $\frac{dx}{yu}=\frac{dy}{xu} \;\Rightarrow\; xdx=ydy \Rightarrow C_1=y^2-x^2$.

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

2) $\frac{dx}{yu}=\frac{du}{-2xy} \;\Rightarrow\; 2xdx=-udu$ ,

интегрируя это уравнение, найдем

$$C_2=\frac{u^2}{2}+x^2.$$

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения можно представить в виде

$$\Phi(C_1, C_2) = \Phi\left[\frac{u^2}{2} + x^2, x^2 - y^2\right],$$

а общее решение будет выглядеть как

$$u = \pm\sqrt{2\left[f\left(x^2 + y^2\right) - x^2\right]}.$$ ▲

***Пример 18.*** Необходимо найти интегральную поверхность, заданную уравнением

$$xz_y - yz_x = 0,$$

проходящую через кривую, заданную уравнениями

$$x = 0; \quad z = y^2.$$

▲ Запишем уравнение характеристик

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Первый интеграл очевиден

1) $dz = 0 \Rightarrow \mathrm{C}_1 = z$.

Второй интеграл найдем из следующей комбинации

2) $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{-y} \Rightarrow xdx + ydy = 0$,

интегрируя это уравнение, найдем

$$\mathrm{C}_2 = x^2 + y^2.$$

Составим систему (25)

$$\begin{cases} C_1 = z, \\ C_2 = x^2 + y^2, \\ x = 0, \\ z = y^2. \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 + z = 0 + C_1 = C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$$

Следовательно, т.к. $C_1 = z$, а $\mathrm{C}_2 = x^2 + y^2$, то уравнение искомой поверхности проходящей через заданную линию имеет вид

$$z = x^2 + y^2.$$ ▲

***Пример 19.*** Определить к какому типу принадлежит уравнение

$$u_{yy} - a^2 u_{xx} = 0.$$

▲ Сравним это уравнение с общим видом уравнения в частных производных второго порядка

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Eu_x + Du_y + Ku = 0,$$

и определим значения коэффициентов $A$, $B$ и $C$

$A = -a^2$; $B = 0$; $C = 1$,

вычислив выражение

$B^2 - AC = 0^2 - (-a^2)\times 1 = a^2 > 0$,

убедимся в том, что исходное уравнение принадлежат к уравнениям гиперболического типа. ▲

*Пример 20..* Привести к каноническому виду уравнение:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \qquad (П20.1)$$

▲ Запишем общий вид уравнения второго порядка

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (П20.2)$$

и сравним коэффициенты при производных в уравнении (*П20.2*) и в исходном (*П20.1*):

$$a = x^2;\ b = 0;\ c = -y^2.$$

Определим, к какому типу принадлежит исходное уравнение:

$$D = b^2 - ac = 0 - x^2(-y^2) = (xy)^2 > 0,$$

следовательно, исходное уравнение (*П13.1.1*) принадлежит к уравнениям гиперболического типа.

Осуществим переход к канонической форме с помощью общих интегралов уравнения характеристик. В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0, \text{ или } (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0,$$

$$\Rightarrow xdy + ydx = 0,\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},\ \Rightarrow xy = C_1;$$

$$\Rightarrow xdy - ydx = 0,\ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\ \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2.$$

Следовательно, $C_1$ и $C_2$ определяют уравнения семейств характеристик. Тогда преобразование независимых переменных будет иметь вид

$$\xi = C_1 = xy,$$

$$\eta = C_2 = \frac{y}{x}.$$

Найдем $u_{xx}$ и $u_{yy}$ в новых переменных

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y - \frac{y}{x^2}u_\eta,\ \ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = xu_\xi + \frac{1}{x}u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\eta_{\xi\xi} + u_\eta\eta_{xx} =$$

$$= y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.$$

Таким образом, исходное уравнение (*П20.1*) в новых переменных имеет вид:

$$x^2\left(y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta\right) - y^2\left(x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}\right) = 0,$$

и после преобразований, получим

$$2\frac{y}{x}u_\eta - 4y^2u_{\xi\eta} = 0 \text{ или } \frac{1}{2xy}u_\eta - u_{\xi\eta} = 0,$$

с учетом того, что $xy = \xi$ каноническая форма исходного уравнения имеет вид:

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\xi}u_\xi.▲$$

<u>*Пример 21.*</u> Найти решение уравнения

$$u_{tt} = u_{xx},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = x^2,\ u_t\Big|_{t=0} = 4x.$$

▲ Для нахождения решения исходной задачи Коши используем формулу Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\Theta)d\Theta,$$

в которой $\varphi(x) = x^2,\ \ \psi(x) = 4x,$ а $a = 1.$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x-at)^2 + (x+at)^2\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}4\Theta d\Theta = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2xt + t^2 + x^2 + 2xt + t^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}4\frac{\Theta^2}{2}\Bigg|_{x-t}^{x+t} = \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2t^2\right) + (x+t)^2 + (x-t)^2 = x^2 + t^2 + 4xt.$$

Окончательно решение исходной задачи имеет вид

$u(x,t) = x^2 + t^2 + 4xt.$ ▲

***<u>Пример 22.</u>*** Найти решение уравнения

$$u_{tt} = 4u_{xx} + xt,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = x^2,\ u_t\Big|_{t=0} = x.$$

▲ Для нахождения решения исходной задачи Коши используем формулу Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

в которой $\varphi(x) = x^2,\ \ \psi(x) = x,\ \ a = 2,$ а $f(x,t) = xt.$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x-at)^2 + (x+at)^2\right] + \frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\xi d\xi + \frac{1}{4}\int\limits_0^t\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\xi\tau d\xi d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 8xt + 4t^2 + x^2 + 8xt + 4t^2\right) + + \frac{1}{4}\frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{x-2t}^{x+2t} + \frac{1}{4}\int\limits_0^t\tau\frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}d\tau =$$

$$= x^2 + 4t^2 + xt + 2x\left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}\right).$$

Окончательное решение исходной задачи имеет вид

$u(x,t) = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{1}{3}xt^3.$ ▲

***<u>Пример 23.</u>*** Найти решение уравнения

$u_{tt} = \Delta u$ , если $u\big|_{t=0} = x^4 + y$ , $u_t\big|_{t=0} = x + z^2$

▲ Здесь $\bar{x} = (x, y, z),\ u_0 = x^4 + y,\ u_1 = x + z^2.$

Так как $a^2 = 1$ и $f(\bar{x}, t) = 0$, то по формуле

$$u_{n+2}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x},t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} \quad , n = 0,1,2,...$$

получаем $u_{n+2}(\bar{x}) = \Delta u_n(\bar{x}) \ , n = 0,1,2,...$

Отсюда, при $n = 0$, получим

$$u_2 = \Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 12x^2 + 0 + 0 = 12x^2,$$

при $n = 1$, получим

$$u_3 = \Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0 + 0 + 2 = 2,$$

при $n = 2$, получим

$$u_4 = \Delta u_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 24,$$

при $n = 3$, получим

$$u_5 = \Delta u_3 = 0,$$

при $n = 4$, получим

$$u_6 = \Delta u_4 = 0,...$$

то есть, все остальные $u_{2k} = 0 \, (k \geq 3)$ и $u_{2k+1} = 0 \, (k \geq 2)$.

Подставляем найденные $u_n$ в решение

$$u(\bar{x},t) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!}u_2 + \frac{t^3}{3!}u_3 + \frac{t^4}{4!}u_4 + \frac{t^5}{5!}u_5 + .... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_n(\bar{x})$$

получаем

$$u(x,y,z,t) = x^4 + y + t(x + z^2) + \frac{t^2}{2} \cdot 12x^2 + \frac{t^3}{6} \cdot 2 + \frac{t^4}{24} \cdot 24.$$

Окончательно решение задачи имеет вид

$$u(x,y,z,t) = x^4 + y + t(x + z^2) + 6x^2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + t^4. \ \blacktriangle$$

***<u>Пример 24.</u>*** Найти решение уравнения

$$u_{tt} - 2\Delta u = 2xyt^2 \ \text{, если} \ u\big|_{t=0} = xy + z^2 \ \ , \ u_t\big|_{t=0} = y^3$$

▲ Здесь $\bar{x} = (x,y,z),\ u_0 = xy + z^2,\ u_1 = y^3.$ Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x},t) = 2xyt^2$,

то по формуле $u_{n+2}(\bar{x}) = a^2 \Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x},t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} \quad , n = 0,1,2,...$

получаем $u_{n+2}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n}{\partial t^n}(2xyt^2)\Big|_{t=0} \quad , n = 0,1,2,...$

Найдем $u_n$ по этой формуле

$n = 0$

$u_2 = 2\Delta u_0 + 2xyt^2\big|_{t=0} = 2(0+0+2)+0 = 4,$

$n = 1$

$u_3 = 2\Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial t}(2xyt^2)\big|_{t=0} = 2\cdot 6y + 4xyt\big|_{t=0} = 12y + 0 = 12y,$

$n = 2$

$u_4 = 2\Delta u_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(2xyt^2)\big|_{t=0} = 2\cdot 0 + 4xy\big|_{t=0} = 4xy,$

$n = 3$

$u_5 = 2\Delta u_3 + \frac{\partial^3}{\partial t^3}(2xyt^2)\big|_{t=0} = 2\Delta(12y) + 0 = 2\cdot 0 = 0,$

$n = 4$

$u_6 = 2\Delta u_4 + \frac{\partial^4}{\partial t^4}(2xyt^2)\big|_{t=0} = 2\Delta(4xy) + 0 = 2\cdot 0 = 0.$

И так далее, все остальные $u_{2k} = 0\,(k \ge 3)$ и $u_{2k+1} = 0\,(k \ge 2)$.

Подставляем полученные $u_n$ в решение

$$u(\bar{x},t) = u_0 + tu_1 + \frac{t^2}{2!}u_2 + \frac{t^3}{3!}u_3 + \frac{t^4}{4!}u_4 + \frac{t^5}{5!}u_5 + .... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}u_n(\bar{x})\ .$$

получаем

$$u(x,y,z,t) = xy + z^2 + ty^3 + \frac{t^2}{2}\cdot 4 + \frac{t^3}{6}\cdot 12y + \frac{t^4}{24}\cdot 4xy =$$

$$xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6}xyt^4.$$

Таким образом, решением исходного уравнения является функция

$$u(x,y,z,t) = xy + z^2 + ty^3 + 2t^2 + 2yt^3 + \frac{1}{6}xyt^4.\ \blacktriangle$$

***Пример 25.*** Струна, закрепленная на концах $x$=0 и $x$=$l$, имеет в начальный момент форму параболы $u = x(l-x)\cdot\frac{4h}{l^2}$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

▲ Запишем волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \tag{П25.1}$$

начальные условия

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) = x(l-x)\cdot\frac{4h}{l^2}, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) = 0 \tag{П25.2}$$

и граничные условия

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0, \tag{П25.3}$$

в соответствии с условиями задачи.

Решение исходной задачи дается формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos a\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin a\frac{n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{П25.4}$$

в которой коэффициенты ряда – $a_n$ и $b_n$, определяются по формулам

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\frac{4h}{l^2}\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \qquad (П25.5)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = \{\psi(x)=0\} = 0.$$

Вычислим интеграл (*П25.5*)

$$a_n = \frac{8h}{l^2}\int_0^l (lx - x^2)\sin\frac{n\pi}{l}xdx =$$

$$= \{u_1 = lx - x^2, \Rightarrow du_1 = (l-2x)dx;\ dv_1 = \sin\frac{k\pi}{l}xdx, \Rightarrow v_1 = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}x\} =$$

$$= -\frac{8h}{l^2}(lx - x^2)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{8h}{n\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx =$$

$$= \{u_2 = l - 2x, \Rightarrow du_2 = -2dx;\ dv_2 = \cos\frac{n\pi}{l}xdx, \Rightarrow v_2 = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\ \} =$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l + \frac{16h}{n^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}xdx =$$

$$= -\frac{16h}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l = -\frac{16h}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) = \frac{16h}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right],$$

Подставляя найденные значения коэффициентов $a_n$ и $b_n$, в формулу (*П25.4*), получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16h}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]\cos a\frac{n\pi}{l}t\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

При четном $n$=2$k$ выражение $\{1-(-1)^n\} = 0$, следовательно, и решение $u(x,t)=0$, а при нечетном $n$=2$k$+1 выражение $\{1-(-1)^n\} = 2$, поэтому окончательное решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=2k+1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos a\frac{(2k+1)\pi}{l}t\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x, \quad k = 0,1,2,3,\ldots\ldots \blacktriangle$$

***Пример 26.*** Найти решение уравнения

$$u_t = 4u_{xx} + t,\ u\big|_{t=0} = 2x^3$$

▲ Здесь $u_0 = 2x^3$. Так как $a^2 = 2$ и $f(\bar{x},t) = t$, то по формуле

$$u_{n+1}(\bar{x}) = a^2\Delta u_n(\bar{x}) + \frac{\partial^n f(\bar{x},t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0} \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

получаем $u_{n+1}(\bar{x}) = 2\Delta u_n(\bar{x})\ , n = 0,1,2,\ldots$

Отсюда находим

$$u_1 = 2\Delta u_0 = 2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right) = 2(6x+0+0) + t\Big| = 4(3xy + y^2 + z^2),$$

$$u_2 = 2\Delta u_1 = 2(0+8+8) = 32,$$

$$u_3 = 2\Delta u_2 = 0,\ldots$$

То есть, все остальные $u_{k+1} = 0\ (k \ge 2)$.

Подставляем полученные $u_n$ в решение

$$u(\bar{x},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}u_n(\bar{x})=u_0+tu_1+\frac{t^2}{2!}u_2+\frac{t^3}{3!}u_3+\frac{t^4}{4!}u_4+\frac{t^5}{5!}u_5+\dots\quad,$$

получаем $u(x,y,z,t)=x^3y+y^2z^2+t\cdot 4(3xy+y^2+z^2)+\dfrac{t^2}{2}\cdot 32$

или окончательно решение имеет вид

$$u(x,y,z,t)=x^3y+y^2z^2+4(3xy+y^2+z^2)t+16t^2.\ ▲$$

***Пример 27.*** Найти решение уравнения

$u_t=2\Delta u$ , если $u\big|_{t=0}=x^3y+y^2z^2$

▲ Здесь $\bar{x}=(x,y,z),\ u_0=x^3y+y^2z^2.$ Так как $a^2=2$ и $f(\bar{x},t)=0$, то по формуле

$$u_{n+1}(\bar{x})=a^2\Delta u_n(\bar{x})+\frac{\partial^n f(\bar{x},t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}\quad, n=0,1,2,\dots$$

получаем $u_{n+1}(\bar{x})=2\Delta u_n(\bar{x})$ , $n=0,1,2,\dots$

Отсюда находим

$$u_1=2\Delta u_0=2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right)=2(6xy+2z^2+2y^2)=4(3xy+y^2+z^2),$$

$$u_2=2\Delta u_1=2(0+8+8)=32,$$

$$u_3=2\Delta u_2=0,\dots$$

То есть, все остальные $u_{k+1}=0\ (k\ge 2).$

Подставляем полученные $u_n$ в решение в решение

$$u(\bar{x},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}u_n(\bar{x})=u_0+tu_1+\frac{t^2}{2!}u_2+\frac{t^3}{3!}u_3+\frac{t^4}{4!}u_4+\frac{t^5}{5!}u_5+\dots\quad,$$

получаем

$$u(x,y,z,t)=x^3y+y^2z^2+t\cdot 4(3xy+y^2+z^2)+\frac{t^2}{2}\cdot 32$$

или окончательно решение имеет вид

$$u(x,y,z,t)=x^3y+y^2z^2+4(3xy+y^2+z^2)t+16t^2.\ ▲$$

***Пример 28***. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части круга радиуса $R$, удовлетворяющее краевому условию

$$\Delta u=0,$$

$$u\big|_{r=R}=\sin^2\varphi\cdot \qquad (П28.1)$$

▲ В этом примере задана задача Дирихле, где правая часть граничного условия (*П28.1*) $f(\varphi)=\sin^2\varphi$. Решение ищется в круге $(r<R)$, значит, выписывать решение будем по формуле

$$u(r,\varphi)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^n,\ .$$

$$n=1,2,3,4,\dots\dots,$$

Найдем в этой формуле коэффициенты $A_0$, $A_n$ и $B_n$

Для этого подставим само решение в левую часть граничного условия (*П28.1*) при $r = R$, а правую часть, т. е. функцию $f(\varphi)$ разложим в ряд Фурье по синусам и косинусам

$$u\big|_{r=R} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n R^n \cos n\varphi + B_n R^n \sin n\varphi) = f(\varphi) = \sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi . \quad (П28.2)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами и при свободном члене в левой и правой частях полученного равенства (*П28.2*)

$$A_0 = \frac{1}{2},$$

$$n = 2, \Rightarrow A_2 R^2 = -\frac{1}{2}, \Rightarrow \quad A_2 = -\frac{1}{2R^2}$$

$B_n = 0$ (при $\forall n$), т.к. справа нет слагаемых с $\sin n\varphi$,

а также все остальные $A_n = 0$ (кроме $A_0, A_2$). Подставим ненулевые $A_0$ и $A_2$ в решение (18.28) и получим ответ, т. е. найдем функцию $u(r,\varphi)$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \alpha_2 r^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2R^2}\right) r^2 \cos 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\varphi. \ \blacktriangle$$

*Пример 29.* Найти решение уравнения Лапласа внутри круга радиуса $R$ $(r < R)$, удовлетворяющее на границе условию Неймана

$$\Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = 2\cos\varphi + 3\sin 3\varphi. \qquad (П29.1)$$

▲ В этом примере задана задача Неймана, где правая часть граничного условия (*П29.1*) $f(\varphi) = 2\cos\varphi + 3\sin 3\varphi$ (уже разложена в ряд Фурье), которую можно представить в виде двух функций

$$f(\varphi) = 2\cos\varphi + 3\sin 3\varphi = \{f_1(\varphi) = 2\cos\varphi;\ f_2(\varphi) = 3\sin 3\varphi\} = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$$

и для каждой из них найдем решение. Прежде чем решать поставленную задачу проверим выполнение условия $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0$

получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(2\cos\varphi + 3\sin 3\varphi)d\varphi = 2\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{3}\cos 3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0 - 1 + 1 = 0,$$

так как условие выполнено, то для решения поставленной задачи вычислим производную от решения

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n,$$

$$n = 1,2,3,4,\ldots\ldots$$

Получим $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$.

и запишем граничные условия сначала для функции $f_1(\varphi) = 2\cos\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = f_1(\varphi) = 2\cos\varphi \qquad (\Pi 29.2)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами в левой и правой частях полученного равенства (*П29.2*):

1) $n = 1$

$A_1 \cos\varphi = 2\cos\varphi \;\Rightarrow\; A_1 = 2$ ,

а все остальные $A_n = 0$ и $B_n = 0$. Следовательно, решение, соответствующее функции $f_1(\varphi) = 2\cos\varphi$, имеет вид

$$u_1(r,\varphi) = 2r\cos\varphi .$$

Затем запишем граничные условия сначала для функции $f_2(\varphi) = 3\sin 3\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = f_2(\varphi) = 3\sin 3\varphi \qquad (\Pi 29.3)$$

Теперь сравним коэффициенты при синусах и косинусах с одинаковыми аргументами в левой и правой частях полученного равенства (*П29.3*):

2) $n = 3$,

$A_n = 0;$

$B_3 3R^{3-1} = d_n, \Rightarrow B_3 = \dfrac{3}{3R^2},$

а все остальные $B_n = 0$.

Следовательно, решение, соответствующее функции $f_2(\varphi) = 3\sin 3\varphi$ имеет вид

$$u_2(r,\varphi) = \frac{r^3}{R^2}\sin 3\varphi .$$

Таким образом, решение исходной задачи будет определяться формулой

$$u(r,\varphi) = u_1(r,\varphi) + u_2(r,\varphi) = 2r\cos\varphi + \frac{r3}{R^2}\sin 3\varphi. \ \blacktriangle$$

***5.3. Темы для устного опроса***

**1. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Условие Липшица.**

**2. Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной**

**3. Уравнение Чебышева.**

**4. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных.**

**5. Уравнения гидродинамики и звуковых волн.**

**6. Уравнение характеристик и его использование для приведения уравнения к каноническому виду.**

**7. Собственные значения и собственные функции.**

**8. Решение задачи Коши методом Пуассона.**

9. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца.

**5.4. Вопросы к зачету**

1. **Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной.**
2. **Уравнения с разделенными переменными и приводящиеся к ним.**
3. **Линейные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним.**
4. **Уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной.**
5. **Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.**
6. **Однородные линейные уравнения.**
7. **Неоднородные линейные уравнения и методы их решений.**
8. **Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами. Уравнения Эйлера.**
9. **Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных.**
10. **Метод характеристик.**
11. **Уравнения в частных производных первого порядка и методы их интегрирования.**
12. **Решение задачи Коши.**
13. **Уравнение колебаний.**
14. **Уравнение теплопроводности и диффузии.**
15. **Уравнения гидродинамики и звуковых волн.**
16. **Определение типа уравнения в частных производных 2-го порядка.**
17. **Метод характеристик для приведения уравнения в частных производных 2-го порядка к каноническому виду.**
18. **Задача Коши для уравнений колебаний.**
19. **Формула Даламбера для свободных и вынужденных колебаний.**
20. **Методы решения краевых задач.**
21. **Задача Штурма-Лиувилля.**
22. **Собственные значения и собственные функции.**
23. **Метод разделения переменных (метод Фурье) при решении граничных задач уравнений гиперболического типа.**
24. **Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.**
25. **Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности.**
26. **Метод Тейлора для решения задачи Коши.**
27. **Метод разделения переменных (метод Фурье) для решения граничных задач уравнений гиперболического типа.**
28. **Уравнения Лапласа и Пуассона.**

**29. Фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве.**

**30. Постановка основных краевых задач: задача Дирихле.**

**31. Постановка основных краевых задач: задача Неймана.**

**32. Решение уравнения Лапласа для круга.**

**33. Сферические функции.**

**34. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца.**