Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине Б1.В.ОД.12 Основы математической статистики

Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	43.03.02 Туризм профиль "Технология и организация туроператорских и турагентских услуг"
3.	Дисциплина (модуль)	Б1.В.ОД.12 Основы математической статистики
4.	Тип заданий	Тесты, контрольные задания
5.	Количество этапов формирования компетенций (ДЕ, разделов, тем и т.д.)	5

Перечень компетенций

ПК-2: способностью обрабатывать и интерпретировать с использованием базовых знаний математики и информатики данные, необходимые для осуществления проектной деятельности в туризме. **ПК-6:** способностью находить, анализировать и обрабатывать научно-техническую информацию в области туристской деятельности.

Критерии и показатели оценивания компетенций

Знания: основные понятия, связанные с математической статистикой; методы решения задач математической статистики, основы автоматизации решения задач вычислительного характера, необходимые для работы с информацией в глобальных компьютерных сетях.
Умения: использовать базовые знания и методы математической статистики; применять классические методы математической статистики при решении фундаментальных и прикладных задач; самостоятельно разбираться в мощном математическом аппарате, содержащемся в специальной литературе; доводить решение вероятностной задачи до практически приемлемого результата (уметь проводить доказательства и делать выводы
Навыки: владения современными знаниями о математике; математическим языком, математическими терминами, математической символикой, методами решения рассматриваемых в курсе задач, основами автоматизации решения задач вычислительного характера; необходимыми умениями для работы с информацией в глобальных компьютерных сетях.

Этапы формирования компетенций

1. Выборочный метод.
2. Статистические оценки параметров распределения.
3. Интервальные оценки параметров распределения.
4. Элементы теории корреляции.
5. Статистическая проверка статистических гипотез.

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы

«2» - 60 баллов и менее «3» - 61-80 баллов «4» - 81-90 баллов «5» - 91-100 баллов

1. **Тест**

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-100
Количество баллов за решенный тест	0,5	1	2

2. **Решение задач в самостоятельных аудиторных работах и домашних контрольных работах, а также в индивидуальных заданиях.**

0,5 балла выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи, правильно изложил все варианты их решения, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

0,3 балла выставляется, если студент решил не менее 85% рекомендованных задач, правильно изложил все варианты решения, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

0,2 балла выставляется, если студент решил не менее 65% рекомендованных задач, правильно изложил все варианты их решения, аргументировав их, с обязательной ссылкой на соответствующие нормативы (если по содержанию это необходимо).

0 баллов - если студент выполнил менее 50% задания, и/или неверно указал варианты решения.

Шкала оценивания:

«2» – 60% и менее «3» – 61-80% «4» – 81-90% «5» – 91-100%

Типовое контрольное задание

1. Задано статистическое распределение выборки. Найти:
а) эмпирическую функцию распределения F*($\boldsymbol{x}$);
б) точечные оценки параметров распределения: выборочное среднее, исправленную дисперсию, исправленное среднеквадратическое отклонение.

x_i	13	14	16	20
n_i	4	2	1	3

2. По выборке объемом $\boldsymbol{n}$ определены выборочное среднее $\overline{x}_в$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{s}$ нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания $\boldsymbol{a}$ и дисперсии σ^2. Принять Р = 0,95.

3. По двум независимым выборкам $\boldsymbol{n}_x$ = 9 и $\boldsymbol{n}_y$ = 10 извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y найдены выборочные средние $\overline{x}$ = 2,41 и $\overline{y}$ =2,32. Генеральные дисперсии известны:

$$D(X)=(s_x)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36 \quad \text{и} \quad D(Y)=(s_y)^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$$

Необходимо при уровне значимости α = 0,01 проверить нулевую гипотезу H_0:M(X) = M(Y) о равенстве средних при конкурирующей гипотезе H_1: M(X) $\neq$ M(Y).

4. В результате проведения $\boldsymbol{n}$ опытов полученны $\boldsymbol{n}$ пар значений ($\boldsymbol{x}_i$; $\boldsymbol{y}_i$). Допуская, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ связанны линейной зависимостью $\boldsymbol{y = kx+b}$, методом наименьших квадратов найти коэффициенты $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}$, а также выборочный коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}_в$. Проверить значимость корреляционной зависимости. Принять уровень значимости α = 0,1.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	12,4	14,7	18,2	21,1	23,2

$\underline{\boldsymbol{n} = 5}$

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний

Решения типовых контрольных заданий

1. Решение. а) Эмпирической функцией распределения F*($\boldsymbol{x}$) называется относительная частота того, что признак примет значение, меньшее заданного. Другими словами, для данного $\boldsymbol{x}$ эмпирическая функция распределения представляет накопленную частоту

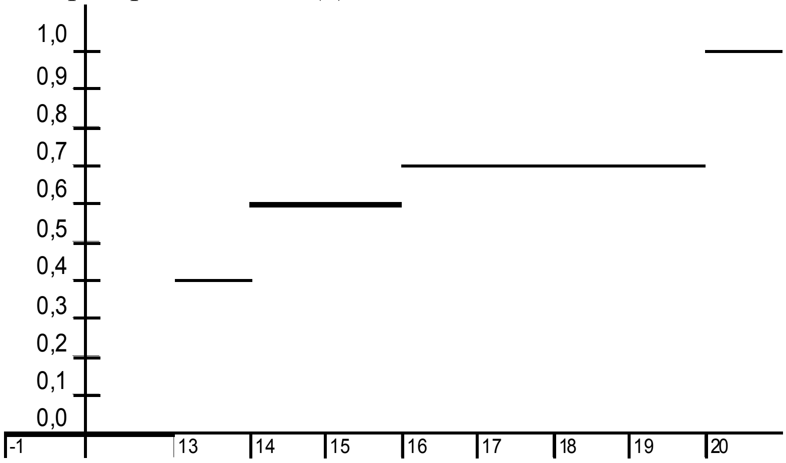
$$F^*(\boldsymbol{x}) = \frac{n_i^{накопл}}{n} = \boldsymbol{w}_{\mathrm{i}}^{\text{накопл}}$$

Для эмпирической функции распределения рассчитаем относительные частоты по формуле $\boldsymbol{w}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}} / \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ – объем выборки. Вычисления занесем в таблицу:

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$	$\boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$	$\boldsymbol{w}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}} / \boldsymbol{n}$	F*
13	4	0,4	0,4
14	2	0,2	0,6
16	1	0,1	0,7
20	3	0,3	1,0
Σ	$\boldsymbol{n}$ = 10	1,0	

Таким образом эмпирическая функция распределения **F*($\boldsymbol{x}$)** имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 13 \\ 0{,}4 & при \; 13 < x \le 14 \\ 0{,}6 & при \; 14 < x \le 16 \\ 0{,}7 & при \; 16 < x \le 20 \\ 1 & при \quad x > 20 \end{cases}$$



б) Выборочные числовые характеристики вычислим по формулам:

$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$ – выборочное среднее; $\quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \, n_i - \left(\bar{x}_в\right)^2$ – выборочная дисперсия

Для удобства произведения $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$ и $\boldsymbol{x}^2_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$ вычислим с помощью таблицы:

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}$	$\boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$	$\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$	$\boldsymbol{x}^2_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}$
13	4	52	676
14	2	28	392
16	1	16	256
20	3	60	1200
Σ	**10,0**	**156,0**	**2524**

$$\bar{x}_в = \frac{156}{10} = 15{,}6 \qquad D_в = \frac{2524}{10} - (15{,}6)^2 = 252{,}4 - 243{,}36 = 9{,}04$$

Исправленную дисперсию s^2 найдем по формуле $s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{10}{9} 9{,}04 = 10{,}04$

Исправленное среднее квадратическое отклонение s равно квадратному корню из исправленной дисперсии

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{10{,}04} = 3{,}17.$$

2. Решение. Доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания имеет вид:

$$\bar{x}_в - \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x}_в + \frac{t \cdot s}{\sqrt{n}}.$$

По условию задачи величина ***t*** распределена по нормальному закону, поэтому ее значение для интегральной функции Лапласа будет составлять

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475 \quad \Rightarrow \quad t = 1.96$$

Тогда доверительный интервал имеет вид:

$$1{,}32 - \frac{1.96 \cdot 0{,}3}{\sqrt{16}} \le a \le 1{,}32 - \frac{1.96 \cdot 0{,}3}{\sqrt{16}}$$

$$1{,}32 - 0{,}147 \le a \le 1{,}32 + 0{,}147$$

$$1{,}47 \le a \le 1{,}17$$

Доверительный интервал для оценки неизвестной дисперсии имеет вид:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^{\ 2}} < D(X) < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^{\ 2}}$$

Для величины $\chi_1^{\ 2}$ вероятность P = (1 + 0,95)/2 = 0,975;

Для величины $\chi_2^{\ 2}$ вероятность P = (1 – 0,95)/2 = 0,025

По числу степеней свободы, равному ***n***–1 = 15, находим из таблицы распределения χ2

Находим $\chi_1^{\ 2} = 6{,}26$ и $\chi_2^{\ 2} = 27{,}5$

Тогда искомый доверительный интервал будет иметь вид:

$$\frac{15 \cdot 0{,}3^2}{27{,}5} < D(X) < \frac{15 \cdot 0{,}3^2}{6{,}26}$$

$$0{,}05 < D(X) < 0{,}22$$

3. Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n_x} - \frac{D(Y)}{n_y}}} = \frac{2{,}41 - 2{,}32}{\sqrt{\frac{0{,}36}{9} - \frac{0{,}16}{10}}} = \frac{0{,}09}{0{,}155} = 0{,}58$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: M(X) ≠ M(Y), поэтому критическая область двусторонняя. Найдем правую критическую точку :

$\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495$. По таблице интегральной функции Лапласа находим $z_{кр} = 2{,}58$. Так как $z_{набл} < z_{кр}$, то нулевая гипотеза о равенстве средних ***подтверждается***. Другими словами, выборочные средние различаются не значимо.

4. Решение. Параметры ***k*** и ***b*** , а так же выборочный коэффициент корреляции найдем по таким формулам: $k = \dfrac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$; (1)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \quad (2)$$

$$r_в = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \quad (3)$$

Вычислим необходимые суммы, пользуясь следующей расчетной таблицей:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
0.2	12.4	2.48	0.04	153.76
0.4	14.7	5.88	0.16	216.09
0.6	18.2	10.92	0.36	331.24
0.8	21.1	16.88	0.64	445.21
1	23.2	23.2	1	538.24
3.0	**89.6**	**59.4**	**2.2**	**1684.5**

тогда

$$\boldsymbol{k} = \frac{5 \quad 59.4 \quad - \quad 3 \quad 89.6}{5 \quad 2.2 \quad - \quad 3.0} = \frac{28}{2} = 14$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{2.2 \quad 89.6 - \quad 3.0 \quad 59.4}{5 \quad 2.2 - \quad 3.0} = \frac{19}{2} = 9.52$$

Таким образом, искомое уравнение регрессии имеет вид

$$\mathbf{Y = \quad 14\,\mathit{x} \quad + \quad 9.52}$$

выборочный коэффициент корреляции равен

$$r_в = \frac{5 \cdot 59.4 - 3 \cdot 89.6}{\sqrt{5 \cdot 2.2 - (3)^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 1684.5 - (89.6)^2}} = \frac{28.2}{1.41 \cdot 19.86} \approx 0{,}999,$$

1. Выборочный коэффициент корреляции r служит для оценки силы линейной корреляционной связи: чем ближе $|r|$ к единице, тем сильнее связь; чем ближе $|r|$ к нулю, тем связь слабее.

Видим, что в нашем случае линейная корреляционная связь очень сильная.

Так как выборочный коэффициент корреляции $\boldsymbol{r}$ положителен, то увеличение одной величины приводит к увеличению другой.

Для проверки статистической значимости корреляционной зависимости величин воспользуемся критерием Стьюдента:

$$t = \frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} = \frac{0.999 \cdot \sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(0.999)^2}} = \frac{1.73}{0.045} = 38.4\,.$$

Для уровня значимости α = 0,1 и числа степеней свободы равным $\boldsymbol{n}$–2 = 3 по таблице в учебнике, найдем критическое значение критерия Стьюдента $t_{\alpha;(n-2)} = t_{0,1;\,3} = 2{,}35$.

Так как, $t_{расчет} > t_{\alpha(n-2)}$, то принимаем гипотезу Н. Вывод: корреляционная связь между признаками статистически значимая.

Ссылки на электронные программы для самоподготовки студента

http://test.i-exam.ru/training/student/test.html

Вопросы к зачету

1. Задача математической статистики.
2. Генеральная совокупность и выборка.
3. Повторная и бесповторная выборки.
4. Репрезентативная выборка.
5. Способы отбора.
6. Статистическое распределение выборки.
7. Эмпирическая функция распределения.
8. Полигон и гистограмма.
9. Выборочная средняя как оценка математического ожидания теоретического распределения.
10. Генеральная и выборочная дисперсия.
11. Исправленная дисперсия.
12. Точечные оценки параметров распределения.
13. Точность оценки, доверительная вероятность и доверительный интервал.
14. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном СКО.
15. Условные варианты.
16. Обычные начальные и центральные эмпирические моменты.
17. Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным.
18. Оценка отклонения эмпирического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс.
19. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
20. Условные средние. Корреляционная зависимость.
21. Две основные задачи теории корреляции.
22. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по несгруппированным данным. Корреляционная таблица.
23. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.
24. Пример на отыскание выборочного уравнения прямой линии регрессии.
25. Выборочное корреляционное отношение и его свойства.
26. Корреляционное отношение как мера корреляционной связи.
27. Статистическая гипотеза.
28. Виды гипотез.
29. Ошибки 1-го и 2-го рода.
30. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы.
31. Наблюдаемое значение критерия.
32. Критическая область.
33. Область принятия гипотезы.
34. Критические точки.
35. Отыскание критических областей.
36. Мощность критерия.
37. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
38. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (независимые выборки).
39. Связь между двусторонней критической областью и доверительным интервалом.

40. Определение минимального объема выборки при сравнении выборочной и гипотетической генеральной средних.
41. Критерий согласия Пирсона.